Řešení 5. série

Úloha 1. *Václavek s Veverkou se pohybují po rovné cestě. V jedné minutě se posunou o 13 m dopředu a poté o 11 m dozadu. Pokud má cesta 540 metrů, po kolika minutách se dostanou na konec?*

Řešení:

V jedné minutě se posunou celkem o $13 - 11 = 2$ m dopředu. Na konci 263. minuty budou tedy $2 \cdot 263 = 526$ m od začátku. 264. minutu se posunou o 13 m (jsou 539 m od začátku) a zpět o 11 m (jsou 528 m od začátku). 265. minutu by se po posunutí o 13 m ocitli 541 m od začátku, ale cesta má 540 m, takže jsou na konci.

Na konec cesty se dostanou 265. minutu.

Úloha 2. *Máme tři krabice. V jedné krabici jsou pouze sudokuny, v jedné jsou pouze lichokuny a ve třetí jsou sudokuny i lichokuny. Krabice jsou označené cedulkami „Sudokuny“, „Lichokuny“ a „Sudokuny+lichokuny“, což původně odpovídalo tomu, jaké prvky jsou v dané množině. Nějaký darebák ovšem názvy krabic přeházel (tj. vyměnil cedulky) tak, že každá krabice je nyní označena špatně. Můžeme tím, že z jedné krabice (vybíráme ze které) vytáhneme jeden objekt a zjistíme, jestli jsme vytáhli sudokunu nebo lichokunu, s jistotou určit, jak cedulky patří správně (tedy co je v které krabici)?*

Řešení:
Ano, jde to.

Sáhneme do krabice s nápiskem „Sudokuny+lichokuny“, o které víme, že je označena špatně a je tudíž buď krabicí se sudokunami, nebo krabicí s lichokunami. Vytáhneme jeden prvek. Řekněme, že jsme vytáhli sudokunu. Víme, že krabici, do které jsme sáhli, patří určitě nápisek „Sudokuny“.

Teď se zamyslíme nad tím, které krabici patří nápisek „Lichokuny“. Určitě to není ta, kam jsme teď sahali, a určitě to není krabice, která má teď nápisek „Lichokuny“, musí to tedy být krabice s nápiskem „Sudokuny“.

Na krabici, která teď měla nápisek „Lichokuny“, tedy zbyl nápisek „Sudokuny+lichokuny“.

Kdybychom nevytáhli sudokunu, ale lichokunu, postupovali bychom obdobně, jen bychom prohodili sudokuny a lichokuny.

Úloha 3. *Mějme 10 různých kamínků rozdělených do 2 bot po 5. Chceme kamínky seřadit tak, aby se pravidelně střídaly kamínky z různých bot. Kolika způsoby to lze udělat?*

Řešení:

Budeme používat kombinatorické pravidlo součinu. Tj. ve chvíli, kdy máme na výběr z několika možností, musíme jejich počet přinásobit.

První kamínek si můžeme vybrat bez omezení, tedy z 10 možností. Druhý pak musí být z jiné boty než první, takže máme na výběr 5 možností. Třetí pak zase ze stejné, ale už máme na výběr pouze 4 kamínky. Čtvrtý zase z jiné a taky vybíráme ze 4 zbylých. Takto dojdeme až na konec, čímž vytvoříme součin $10 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 1 = 28800$ způsobů.

Stejné číslo můžeme dostat i jiným způsobem. Označme boty A a B. Řada pak bude vypadat buď jako $ABABABABAB$, nebo jako $BABABABABA$. V každé z těchto možností už je $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 5!$ (čti „pět faktoriál“) způsobů, jak dosadit objekty typu A a 5! způsobů, jak dosadit objekty typu B. Celkem tedy opět máme $2 \cdot 5! \cdot 5! = 28800$ způsobů.

Výsledek je 28 800.

Úloha 4. *Mějme dvě trojice reálných čísel a, b, c a x, y, z. Platí, že $b = 9$, $c = 25$, $x = 15$. Poměr čísel $y : z = 3 : 5$. Dokažte, že když a je větší rovno jedné devítině z druhé mocniny y, tak součet $x + y + z$ není větší než součet $a + b + c$.*

Řešení:

První trojice je a, 9, 25. Druhá trojice je 15, $3 \cdot k$, $5 \cdot k$.

Chceme ukázat, že když $a \geq \frac{1}{9} \cdot y^2$, tak $a + b + c \geq x + y + z$. Stačí ukázat, že to platí, když $a = \frac{1}{9} \cdot y^2$, neboť pokud je a ještě větší, zvýší to pouze součet první trojice.

Víme tedy $a = \frac{1}{9} \cdot y^2 = \frac{1}{9} \cdot (3k)^2 = k^2$. Po úpravě zjistíme, že chceme dokázat:

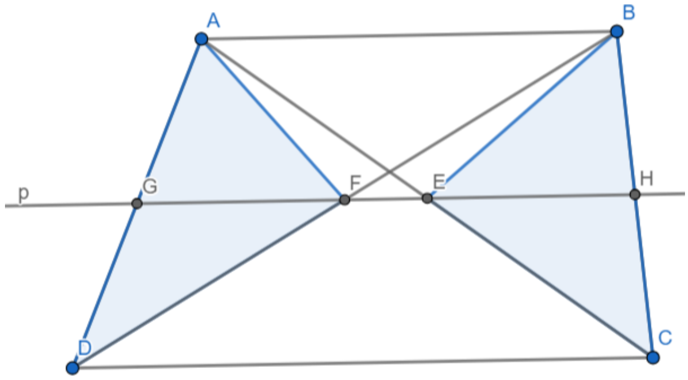
$$\begin{aligned} a + b + c &\geq x + y + z \\ k^2 + 9 + 25 &\geq 15 + 3 \cdot k + 5 \cdot k \\ k^2 - 8 \cdot k + 19 &\geq 0 \\ (k^2 - 8 \cdot k + 16) - 16 + 19 &\geq 0 \\ (k - 4)^2 + 3 &\geq 0 \end{aligned}$$

$(k - 4)^2$ je kvadrát, který musí být nezáporný, takže tvrzení ze zadání určitě platí.

Úloha 5. *Mrak má tvar lichoběžníku $ABCD$, $AB \parallel CD$. Středy úseček AC a BD označme postupně E a F. Dokažte, že trojúhelníky AFD a BEC mají stejný obsah.*

S_{XYZ} bude znamenat obsah trojúhelníku XYZ.

Řešení 1:



Středy úseček AD a BC označme postupně G a H. Všimněme si, že EG je střední příčka trojúhelníku ACD, takže $EG \parallel CD$. Dále je EH taky střední příčka trojúhelníku ABC, takže $EH \parallel AB$. Dohromady máme

$$EG \parallel CD \parallel AB \parallel EH,$$

z čehož vyplývá, že body G, E a H leží na jedné přímce. Podobně ze středních příček v trojúhelnících ABD a BDC máme

$$GF \parallel AB \parallel CD \parallel HF,$$

takže opět body G, F a H leží na jedné přímce. Dohromady potom víme, že všechny čtyři body G, F, E, a H leží na jedné přímce, která je rovnoběžná s AD i BC. Označme ji p.

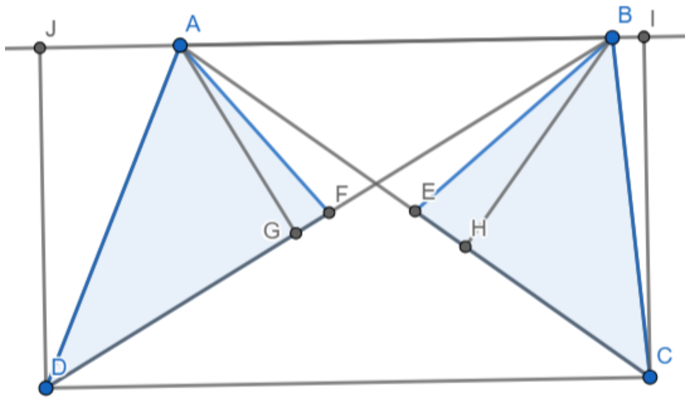
GH je střední příčka lichoběžníku $ABCD$, takže vzdálenosti přímky GH, tedy p, k přímkám AB a CD jsou stejné. Tuto vzdálenost nazvěme x. Nakonec kvůli tomu, že jsou GF a EH střední příčky v trojúhelnících ADB a ABC, platí

$$|GF| = \frac{1}{2} \cdot |AB| = |EH|.$$

Dohromady potom máme

$$S_{AFD} = S_{AGF} + S_{GFD} = \frac{1}{2} \cdot |GF| \cdot x + \frac{1}{2} \cdot |GF| \cdot x = \frac{1}{2} \cdot |EH| \cdot x + \frac{1}{2} \cdot |EH| \cdot x = S_{BEH} + S_{EHC} = S_{BEC}.$$

Řešení 2:



Paty výšek z bodů A, B, C a D na přímky BD, AC, AB a AB označme postupně G, H, I a J. Potom

$$
\begin{aligned}
S_{ABD} &= S_{ABF} + S_{AFD} \\
&= \frac{1}{2} \cdot |BF| \cdot |AG| + \frac{1}{2} \cdot |DF| \cdot |AG| \\
&= \frac{1}{2} \cdot |DF| \cdot |AG| + \frac{1}{2} \cdot |DF| \cdot |AG| \\
&= 2 \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot |DF| \cdot |AG| \right) \\
&= 2 \cdot S_{AFD} \\
S_{AFD} &= \frac{1}{2} \cdot S_{ABD}
\end{aligned}
$$

Podobně

$$
\begin{aligned}
S_{ABC} &= S_{ABE} + S_{BEC} \\
&= \frac{1}{2} \cdot |AE| \cdot |BH| + \frac{1}{2} \cdot |EC| \cdot |BH| \\
&= \frac{1}{2} \cdot |EC| \cdot |BH| + \frac{1}{2} \cdot |EC| \cdot |BH| \\
&= 2 \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot |EC| \cdot |BH| \right) \\
&= 2 \cdot S_{BEC} \\
S_{BEC} &= \frac{1}{2} \cdot S_{ABC}
\end{aligned}
$$

Všimněme si, že kvůli rovnoběžnosti přímek AB a DC platí $|CI| = |DJ|$. Proto

$$S_{ABD} = \frac{1}{2} \cdot |AB| \cdot |DJ| = \frac{1}{2} \cdot |AB| \cdot |CI| = S_{ABC}.$$

Dohromady pak máme

$$S_{AFD} = \frac{1}{2} \cdot S_{ABD} = \frac{1}{2} \cdot S_{ABC} = S_{BEC}.$$

Úloha 6. *Najděte všechny čtveřice po sobě jdoucích přirozených čísel, které splňují, že se součet třetích mocnin prvních tří rovná třetí mocnině čtvrtého čísla.*

Řešení:

Označme: $x\ldots$ první hledané číslo, ostatní jsou tedy $x+1$, $x+2$, $x+3$.

Zadání přepíšeme do rovnice: $x^3 + (x+1)^3 + (x+2)^3 = (x+3)^3$, závorky umocníme a upravíme:

$$\begin{aligned} x^3 + x^3 + 3 \cdot x^2 + 3 \cdot x + 1 + x^3 + 6 \cdot x^2 + 12 \cdot x + 8 &= x^3 + 9 \cdot x^2 + 27 \cdot x + 27 \\ 3 \cdot x^3 + 9 \cdot x^2 + 15 \cdot x + 9 &= x^3 + 9 \cdot x^2 + 27 \cdot x + 27 \\ 2 \cdot x^3 - 12 \cdot x - 18 &= 0 \\ x^3 - 6 \cdot x - 9 &= 0 \\ x^3 - 9 \cdot x + 3 \cdot x - 9 &= 0 \end{aligned}$$

To lze rozložit na součin:

$$\begin{aligned} x \cdot (x^2 - 9) + 3 \cdot (x - 3) &= 0 \\ x \cdot (x+3)(x-3) + 3 \cdot (x-3) &= 0 \\ (x-3)(x^2 + 3x + 3) &= 0 \end{aligned}$$

Součin dvou čísel se rovná nule právě tehdy, když se alespoň jedno z čísel rovná nule, dostáváme tedy dvě možnosti: $x - 3 = 0$ nebo $x^2 + 3 \cdot x + 3 = 0$. Druhá možnost v přirozených číslech nemůže nastat (levá strana rovnice je kladná, pravá nulová). Platit musí tedy první možnost $x - 3 = 0$, proto $x = 3$.

Tím dostáváme jediné řešení, a to čtveřici čísel: 3, 4, 5, 6.

Úloha 7. *Pro prvočísla p, q, r platí $p > q$,*

$$\frac{r^2 - 49}{7 + r} - p = \frac{1 - q^2}{1 - q} + p.$$

Určete nejmenší možný součet $r + q$ a všechny možnosti, jaká při tomto součtu mohou být prvočísla p, q, r.

Řešení:
Nejprve výraz upravme a na jedné straně vyjádřeme $r + q$:

$$\begin{aligned}
\frac{r^2 - 49}{7 + r} - p &= \frac{1 - q^2}{1 - q} + p \\
\frac{(r - 7)(r + 7)}{7 + r} - p &= \frac{(1 - q)(1 + q)}{1 - q} + p \\
r - 7 - p &= 1 + q + p \\
r + q &= 8 + 2 \cdot q + 2 \cdot p \\
r + q &= 2 \cdot (4 + q + p)
\end{aligned}$$

Nyní dostáváme, že $r + q$ musí být sudé, tzn. že prvočísla q a r jsou lichá (kdyby oboje byla 2, tak je součet 4 a na druhé straně bude součet větší (min. 8, jelikož tam je aspoň $2 \cdot 4$). Zároveň platí, že $p > q$, tedy p je taky liché. Víme, že součet $r + q$ má být co nejmenší, tzn. že součet $2 \cdot (4 + p + q)$ má také být co nejmenší, tedy součet $p + q$ má být co nejmenší. Zkoušejme tedy možnosti nejmenšího součtu $p + q$ ($p > q$) a poté ověřme, zda je r prvočíslo ($r = 2 \cdot (4 + q + p) - q$).
Je jasné, že nejmenší je $3 + 5$ a poté $3 + 7$:

- $p + q = 5 + 3$, takže $r = 2(4 + 3 + 5) - 3 = 21$, takže r není prvočíslo.
- $p + q = 7 + 3$, takže $r = 2(4 + 3 + 7) - 3 = 25$, takže r není prvočíslo.

$7 + 5 < 11 + 3$, takže dále budeme zkoušet $7 + 5$ a až poté $11 + 3$:

- $p + q = 7 + 5$, takže $r = 2(4 + 5 + 7) - 5 = 27$, takže r není prvočíslo.
- $p + q = 11 + 3$, takže $r = 2(4 + 3 + 11) - 3 = 33$, takže r není prvočíslo.

$13 + 3 = 11 + 5$, takže musíme zkusit oboje:

- $p + q = 13 + 3$, takže $r = 2(4 + 3 + 13) - 3 = 37$, takže r je prvočíslo a $r + q = 37 + 3 = 40$.
- $p + q = 11 + 5$, takže $r = 2(4 + 5 + 11) - 5 = 35$, takže r není prvočíslo.

Nejmenší možný součet $r + q$ je tedy 40 a jediná možnost na hodnoty prvočísel je $p = 13$, $r = 37$, $q = 3$.