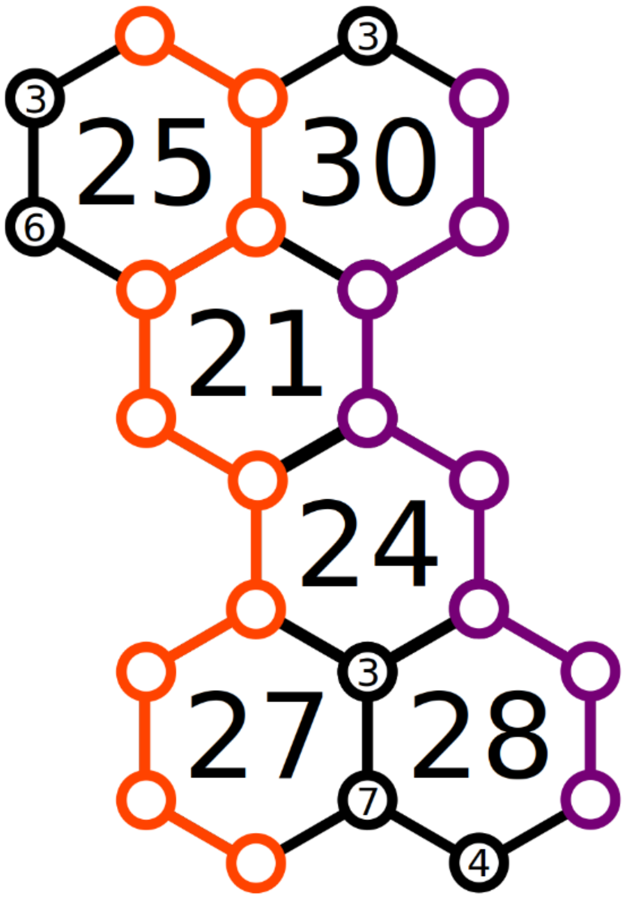
Řešení Páté Série

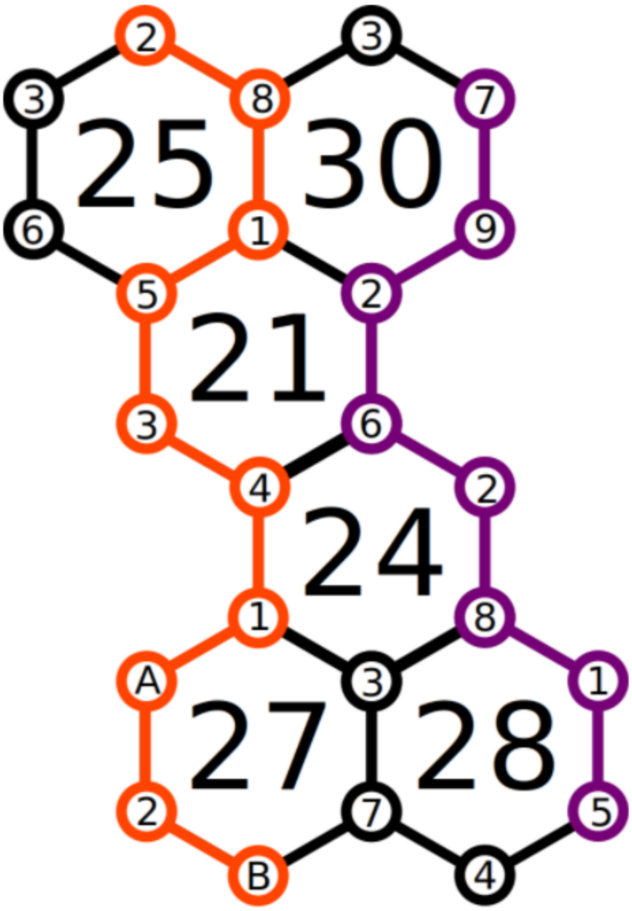
Úloha 1. *Doplň čísla 1 - 9 do prázdných vrcholů šestiúhelníků tak, aby:*
1) v žádném šestiúhelníku nebylo některé číslo více než jednou
2) součet čísel ve vrcholech daného šestiúhelníku odpovídal číslu uprostřed něj
3) součet čísel v každém řetězci (oranžový a fialový) byl 40
4) oba řetězce byly od shora dolů doplněny čísly, která k sobě budou mít tento vztah:

$$? < ? > ? < ? > ? \dots$$



Úloha má celkem 4 řešení:

1. A = 9; B = 5
2. A = 5; B = 9
3. A = 8; B = 6
4. A = 6; B = 8



Úloha 2. *Senátoři dělají hlasovaní. Vyjde to 52% pro ANO a 48% pro NE. Pro ANO hlasovalo o jedna vice lidí než pro NE. Kolik lidí celkem hlasovalo?*

Počet lidí, co hlasovalo, je $2x + 1$. Zkrátíme $\frac{52}{100} = \frac{26}{50}$, aby se nám lépe počítalo. Dále máme

$$\frac{26(2x+1)}{50} = x + 1,$$

protože víme, že $\frac{26}{50}$ celku $(2x + 1)$ je rovno $x + 1$ a nyní stačí dopočítat následující rovnici:

$$\begin{aligned} 52x + 26 &= 50x + 50 \\ 2x &= 24 \\ x &= 12 \end{aligned}$$

Celkem hlasovalo $2 \cdot 12 + 1 = 25$ lidí.

Úloha 3. *Máme trojúhelník ABC. Úhly CAB a ACB jsou stejně veliké. Střed strany BC je S. Bodem S vedeme rovnoběžku na stranu AB. Průsečík rovnoběžky a strany AC je T. Kolik je $|ST|$, jestliže BC je 4?*

Protože jsou úhly stejně velké, jde o rovnoramenný trojúhelník se základnou AC. ST prochází středem strany trojúhelníku a je rovnoběžná s jinou jeho stranou, jde tedy o střední příčku, konkrétně ke straně AB. Protože $|AB| = |BC|$ a $|ST| = \frac{1}{2}|AB|$ (z vlastností středních příček), je délka ST rovna $\frac{4}{2}$ tedy 2.

Úloha 4. *Čtyřčlenná kapela hrála zvláštní písničku. Písnička měla celkem 100 dob. První člen kapely tleskl vždy, když doba byla prvočíslo a tu dobu po tom, co doba bylo prvočíslo (p+1). Druhý člen zaštěrchal vždy, když zbytek po dělení dvanácti byl 5. Třetí luská jen na doby, které obsahují číslici tři. Čtvrtý zacinká poprvé první dobu, pak dvě doby vynechá, pak zase zacinká, pak jednu dobu vynechá, pak zase zacinká, pak zase vynechá dvě doby, zacinká, vynechá jednu dobu, zacinká, atd. Určete dobu, kdy zazní všechny zvuky.*

Vypíšu si všechny doby, kdy štěrchá druhý člen:

$$5, 17, 29, 41, 53, 65, 77, 89.$$

Jediná doba z nich, na kterou luská třetí člen je 53. 53 je prvočíslo, tedy první člen bude tleskat. Zbývá zjistit, jestli bude cinkat čtvrtý.

Můžeme si povšimnout, že čtvrtý člen cinká vždy, když zbytek po dělení pěti je 1 nebo 4. Zbytek 53 po dělení pěti je 3, tedy čtvrtý cinkat nebude.

Žádná taková doba tedy neexistuje.

Úloha 5. *Dva cestovatelé TP a MK (kteří umí chodit po vodní hladině) se rozhodli, že si prochodí rovník. Měli vyrazit z nultého poledníku v Guinejském zálivu – TP na západ rychlostí v, MK na východ rychlostí w. MK ale nestihl kvůli berlím hydroplán a vyrazil na cestu ze zálivu až o 2 dny později. TP na něho nečekal. Kde (v zeměpisné délce) a za jak dlouho se cestovatelé potkají, když víme, že kdyby MK vyrazil hned po příletu směrem za TP (taky na západ), dohnal by ho za 3 dny po uražení 360 km? (Uvažujme obvod Země jako 40 000 km) (využívejte vztahu rychlost=dráha/čas)*

3°14‘24“ z. d. jsou $3,24°$z. d., tedy devět tisícin obvodu Země, tzn. 360 km. Označme v a w rychlosti cestovatelů, σ hypoteticky uraženou vzdálenost a t_{TP} a t_{MK} jejich hypotetický čas. Všude budeme používat rovnici $v = \frac{s}{t}$ (rychlost se rovná čas děleno vzdálenost). $t_{MK} = 3d = 72h$ (víme ze zadání), takže $v_{MK} = \frac{\sigma}{t_{MK}} = \frac{360}{72} = 5km/h$. $t_{TP} = t_{MK} + 2d = 5d = 120h$ (TP vyrazil o 2 dny dříve), $v_{TP} = \frac{\sigma}{t_{TP}} = \frac{360}{120} = 3km/h$. V realitě urazí oba dohromady celý obvod země, tj. $40000 = s_{TP} + s_{MK} = t_{TP}v_{TP} + t_{MK}v_{MK}$.

$$\begin{aligned}
t_{MK} &= t_{TP} - 2d = t_{TP} - 48 \\
40000 &= t_{TP} \cdot 3 + (t_{TP} - 48) \cdot 5 \\
40000 &= 8t_{TP} - 240 \\
40240 &= 8t_{TP} \\
t_{TP} &= 5030
\end{aligned}$$

Potkají se tedy za 5030 hodin, což je 209 dní a 14 hodin, od startu TP. Spočítáme vzdálenost např. pro TP: $s_{TP} = t_{TP}v_{TP} = 4970 \cdot 3 = 15090km$, to je $\frac{1509}{4000}$ obvodu Země, $135,81° = 135°48'36''$z. d. (TP šel na západ).

Úloha 6. *Páry tančí po spirále. Spirála se skládá z polokružnic na sebe hladce navazujících, přičemž s každou polokružnicí je její poloměr větší. První polokružnice má poloměr $\frac{1}{\pi}$ m, další $\frac{2}{\pi}$ m, další $\frac{3}{\pi}$ m atd. Pan P s X začali uprostřed a tančili po obvodu této spirály. Od začátku ušli 903 m. Jak daleko (vzdušnou čarou) je teď od místa, kde začínali? (Možná se vám tam někde objeví aritmetická řada, umíme počítat součet všech jejich členů?)*

První půlkružnice bude mít délku $\pi r = \pi 1 = 1$ metr. Další půlkružnice s poloměrem $\frac{2}{\pi}$ bude mít délku 2 metry. Další půlkružnice s poloměrem $\frac{3}{\pi}$ bude mít délku 3 metry. Trasa, kterou P s X ušel, bude součtem všech členů aritmetické posloupnosti, kde n-tý člen je roven n. Součet všech členů aritmetické posloupnosti počítáme, jako: $\frac{n(n+1)}{2} = 903$. Vypočítáme n:

$$n^2 + n = 1806$$
$$n^2 + n - 1806 = 0$$
$$(n - 42)(n + 43) = 0$$

Musí tedy platit $n = 42$ metrů, protože -43 by nebyla platná hodnota vzdálenosti. To je ale jenom délka půlkružnice. My potřebujeme zjistit její poloměr, což je rovno $n \cdot \frac{1}{\pi} = \frac{42}{\pi}$. Když si nakreslíme půlkružnice, můžeme si všimnout, že na konci půlkružnic, se sudou délkou – jsou naproti počáteční půlkružnice, jsou P s X vždy vzdáleni od počátečního bodu o poloměr této půlkružnice, tedy od místa, kde začínali, jsou vzdáleni $\frac{42}{\pi}$ metrů (=13,37).

Úloha 7. *Mějme uspořádanou n-tici $X_n = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ s prvky $x_i \in \{1, 2\}$ a výraz*

$$V_n = x_1 + \cdots + x_2 + x_1x_2 + \cdots + x_{n-1}x_n + x_1x_2x_3 + \cdots + x_{n-2}x_{n-1}x_n + \cdots + x_1x_2 \ldots x_n$$

obsahující jako členy všechny kombinace společných součinů těchto n čísel (nezáleží na pořadí, ale můžeme vybírat kombinace s libovolným počtem prvků menším než n). Pro $n = 3$ máme tedy např.:

$$V_3 = x_1 + x_2 + x_3 + x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 + x_1x_2x_3$$

Najděte všechna X_n pro která výraz V_n nabývá sudé hodnoty. (Nápověda: Pokuste se V_n vyjádřit pomocí x_n a V_{n-1}.)

Pokusme se z výrazu V_n vytknout x_n. Je jasné, že x_n musí násobit součet všech kombinací násobků prvků z n-tice X_{n-1} a zároveň musí všechny tyto kombinace ve zbytku členů nenásobit. V jednom jediném členu je x_n samotné. Z toho plyne rovnost:

$$V_n = x_n \cdot [1 + V_{n-1}] + V_{n-1}, \tag{1}$$

což můžeme pro objasnění ilustrovat na V_3:

$$V_3 = x_3 \cdot [1 + (x_1 + x_2 + x_1x_2)] + (x_1 + x_2 + x_1x_2) = x_3 \cdot [1 + V_2] + V_2$$

Nyní si vytvořme jednoduchou tabulku určující paritu V_n vycházející z rovnice (1):

	$x_n \in S$	$x_n \in L$
$V_{n-1} \in S$	$V_n \in S$	$V_n \in L$
$V_{n-1} \in L$	$V_n \in L$	$V_n \in L$

kde S a L jsou po řadě množiny všech sudých a lichých přirozených čísel.

Z toho je jasně vidět, že V_n bude sudé právě tehdy, když bude sudé x_n i V_{n-1}. Indukcí pak jednoduše odvodíme, že sudá musí být všechna x_i. Jedinou vyhovující n-ticí je tedy

$$X_n = (2, 2, 2, \ldots, 2).$$