Řešení Druhé Série

Úloha 1. *Doplňte do tabulky čísla 1 až 64 (pořadí jedlíků) tak, aby se žádné neopakovalo a každá dvě po sobě jdoucí čísla sousedila hranou. Najděte alespoň jedno vyhovující řešení.*

38					29		
		35					24
			45			22	
	54						20
						12	
		1		9			
58			3				17
	60					15	

Je jediné možné řešení, a to následující:

38	37	34	33	30	29	26	25
39	36	35	32	31	28	27	24
40	41	42	45	46	47	22	23
55	54	43	44	49	48	21	20
56	53	52	51	50	11	12	19
57	64	1	2	9	10	13	18
58	63	62	3	8	7	14	17
29	60	61	4	5	6	15	16

Úloha 2. *Při klasické hře kámen, nůžky, papír se používají tři „zbraně“. Při jakých počtech druhů zbraní lze tato hra uskutečnit tak, aby žádná zbraň nebyla zvýhodněna vůči ostatním a při použití různých zbraní šlo vždy rozhodnout o vítězi?*

Aby šla hra hrát, musí mít zápas mezi jakýmikoliv dvěma zbraněmi jednoznačného vítěze. Zároveň musí každá zbraň mít stejný počet těch, co ji porazí a těch, nad kterými vyhraje. Proto musí být zbraní vždy lichý počet. Lichý počet mínus ta jedna zbraň je sudý počet, který jde rozdělit na polovinu zbraní, co tu určitou zbraň porazí a polovinu, co ne. Tudíž tuto hru lze hrát se všemi lichými počty zbraní, kromě 1. (Pozn. 1 se dá uznat jako řešení, ačkoliv hra „kámen, kámen, kámen“ má v reálném životě smysl pouze pokud cílem hráčů je zabít čas.)

Úloha 3. *Jestliže je dnes 27. 5. úterý, jaký den bude za dva roky 29. 5., pokud je příští rok přestupný? (Potřeba zdůvodnit, nestačí říct, že jsi se podíval do kalendáře.)*

$365 + 366 + 2 \equiv 5 \pmod 7$. Pět dní po úterku je neděle.

Úloha 4. *Mějme trojúhelník ABC, se středem kružnice vepsané S. Dokažte, že $| \sphericalangle ASB | = 90° + \frac{1}{2} | \sphericalangle ACB |$.*

Řešení dostaneme, když si uvědomíme, že střed kružnice vepsané dostaneme jako průsečík os úhlů u jednotlivých vrcholů. Proto úhel ASB musí být roven $180° - \frac{|BAC|}{2} - \frac{|ABC|}{2}$, Ale $\frac{|BAC|}{2} + \frac{|ABC|}{2} = \frac{(180°-|ACB|)}{2} = 90° - \frac{|ACB|}{2}$. Takže $|ASB| = 90° + \frac{|ACB|}{2}$.

Úloha 5. *V jaké číselné soustavě je následující rovnice?: $6 \cdot 14 = 123$ (V případě, že nevíte, jak vypadají jiné číselné soustavy než desítková, podívejte se na stránku matematika.cz/prevod)*

Za základ soustavy dosadíme neznámou z. Potom máme rovnici (v desítkové soustavě):

$$\begin{aligned} 6(z+4) &= z^2 + 2z + 3 \\ z^2 - 4z - 21 &= 0 \\ (z-7)(z+3) &= 0 \end{aligned}$$

Číselné soustavy mohou mít jen přirozený základ, vyhovuje tedy pouze $z = 7$. Rovnice je v sedmičkové soustavě. Převedeno do desítkové: $6 \cdot 11 = 66$

Úloha 6. *Kolik existuje uspořádaných 2020-tic celých čísel $(x_1, x_2 \ldots x_{2020})$ splňujících*

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_{2020} = 1$$

$$x_1 x_2 \ldots x_{2020} = p^{2019},$$

kde p je prvočíslo větší než 2.

Z druhé rovnosti vidíme, že existuje $i \in \mathbb{N}, 1 \leq i \geq 2020$ takové, že $x_i = \pm 1$, neboť je zde 2020 činitelů, ale pravou stranu si můžeme rozepsat nejvýše na 2019 součinů p. Bez újmy na obecnosti můžeme položit $x_{2020} = \pm 1$.

Nejprve uvažme variantu $x_{2020} = 1$. Potom $x_1 + x_2 + \cdots + x_{2019} = 0$. Protože $p > 2$, je p liché. Součet lichého počtu lichých čísel je lichý, ale 0 je sudá, a tak nemůže existovat řešení.

Nakonec uvažme $x_{2020} = -1$. Potom $x_1 + x_2 + \cdots + x_{2019} = 2$. Opět na levé straně je součet lichého počtu lichých čísel, a tak neexistuje řešení.

Ani pro jeden z možných neexistuje řešení, tudíž neexistuje řešení pro celou úlohu.

Úloha 7. *Mějme krychli o rozměrech $n \times n \times n$ jejíž každý bod (vnitřek i povrch) má právě jednu ze 3 barev – červenou, zelenou, nebo modrou. Dokažte, že ať je krychle obarvena jakkoli, můžeme v ní vždy nalézt úsečku o délce n, jejíž krajní body mají stejnou barvu. (Nápověda: Podívejte se na Dirichletův princip. Hledejte čtyřstěny.)*

Jelikož má krychle délku strany n, jde v ní vždy sestrojit i čtyřstěn o délce strany n, a to například tak, že dva z jeho vrcholů jsou dvěma sousedními vrcholy krychle, třetí vrchol leží na straně která předchozí dva vrcholy obsahuje a čtvrtý vrchol leží uvnitř krychle nad touto stranou (výška takového čtyřstěnu je určitě menší n, neboť vnitřní úhly stran čtyřstěnu jsou $60°$. Každý z jeho 4 vrcholů musí mít právě jednu ze 3 barev, tedy dle Dirichletova principu existuje alespoň jedna barva, kterou mají alespoň dva vrcholy. Tyto dva vrcholy pak nutně tvoří úsečku o délce n. Jsme v cíli.