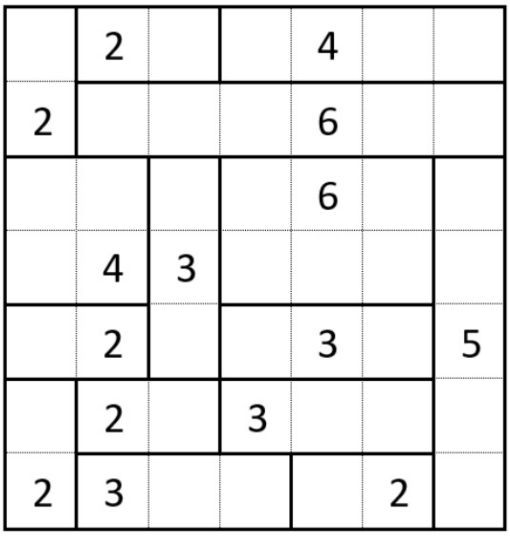
Řešení Druhé Série

Úloha 1. *Jakým způsobem je potřeba rozdělit velký čtverec na menší čtverce a obdélníky tak, aby každý obdélník či čtverec obsahoval právě jedno takové číslo, které označuje počet malých čtverců, z nichž je sám utvořen?*

	2			4		
2				6		
				6		
	4	3				
	2			3		5
	2		3			
2	3				2	

Úloha má pouze jedno správné řešení, a to následující:



Úloha 2. *Ukažte, že existuje přirozené číslo, které se skládá pouze z jedniček a nul a je dělitelné 2020. Úloha není programovací!*

Sestavme si čísla skládající se pouze z jedniček, čili $1, 11, 111, \ldots$. Protože těchto čísel je nekonečně mnoho, určitě jsou zde alespoň dvě se stejným zbytkem po dělení 2020. Odečtením těchto dvou čísel dostaneme číslo zřejmě se skládající pouze z 0 a 1 a zároveň víme, že je dělitelné 2020. Jsou i jiná řešení.

Úloha 3. *Zaměstnanci farmy si rozdělovali peníze, co dostali od pana Funktora. Ten za každou ze tří činností dal dohromady nějakou částku peněz. Urči všechny tři částky, když víš, že:*

- *Slečna Varieta umyla polovinu nádobí, oloupala třetinu brambor, posekala dvě pětiny zahrady a dostala 142 Kč.*
- *František Komárek umyl taky polovinu nádobí, oloupal dvě třetiny brambor, posekal polovinu zahrady a dostal 195 Kč.*
- *Maxmilián udělal zbytek a dostal 13 Kč.*

$$142 = \frac{x}{2} + \frac{y}{3} + \frac{2z}{5}$$
$$195 = \frac{x}{2} + \frac{2z}{3} + \frac{z}{2}$$
$$13 = \frac{z}{10}$$

To znamená, že za zahradu pan Funktor dával 130 kč, tím pádem dostaneme dvě rovnice o dvou neznamých:

$$90 = \frac{x}{2} + \frac{y}{3}$$
$$130 = \frac{x}{2} + \frac{2y}{3}$$

Po odečtení těchto dvou rovnic dostaneme, že $\frac{y}{3} = 40$, tedy $y = 120$ a z toho už snadno dopočítáme, že x je rovno 100.

Úloha 4. $\{[(9 - \square) * \square] - (1 - \square)\} : 5 + \square - \square = 7$
Doplňte na vynechaná místa čísla 1 až 9 tak, aby se zde každé vyskytovalo právě jednou a zároveň platila rovnost.

Můžeme zkoušet dosazovat na první volné místo postupně různá čísla a zejména díky dělitelnosti pěti nám poté vyplyne, jak by měl příklad pokračovat.

$$(((9 - 3) * 4) - (1 - 2))/5 + 8 - 6 = 7$$

Úloha 5. 7^{18} *má po dělení 100 zbytek n, urči číslo n. Nestačí vyčíslit, je potřeba logické zdůvodnění.*

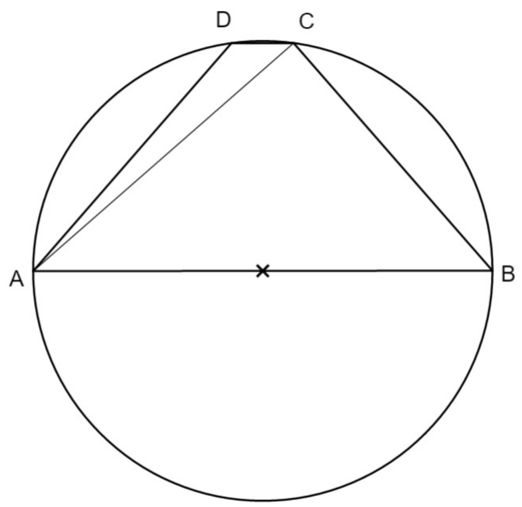
Když se podíváme na prvních pár mocnin čísla 7, všimneme si, že se poslední dvě cifry po čtyřech mocninách opakují (07, 49, 43, 01). Je tomu tak proto, že na změnu posledních dvou cifer v nějakém násobku mají vliv právě jen tyto dvě posledních cifry, neboť stovky už desítky a jedničky neovlivní. Tedy všechno, co přeleze do stovek, můžeme klidně smazat. A jelikož násobíme stále stejným číslem, neboť jde o mocniny sedmičky, dostaneme se do dříve zmíněné periody o délce 4. Nás zajímá zbytek po dělení 100, což není nic jiného, než poslední dvě cifry čísla, a máme tedy vyhráno. 18 má stejný zbytek po dělení 4 jako 2 (18 je s 2 kongruentní modulo 4). Poslední dvojčíslí bude tím pádem stejné jako u druhé mocniny sedmičky, tedy 49.

Úloha 6. *Máme zadaný lichoběžník a jemu kružnici opsanou. Víme, že delší základna má délku 7,3, některé z ramen 4,8 a vzdálenost vrcholu známého ramene, který zároveň není vrcholem známé základny a středu kružnice je 3,65. Určete délky obou úhlopříček lichoběžníku.*

Lze-li lichoběžníku opsat kružnice, musí být rovnoramenný. Lze to dokázat například tak, že střed kružnice opsané musí ležet na průsečíku os stran. Vzhledem k tomu, že základny jsou rovnoběžné, i jejich osy spolu budou rovnoběžné, tedy se protnou pouze v případě, budou-li totožné, což nastane pouze tehdy, bude li lichoběžník osově souměrný podle této osy, což splňuje jen rovnoramenný lichoběžník. Z toho vyplývá, že obě úhlopříčky jsou stejně dlouhé. Dále vzhledem k tomu, že bod C (viz obrázek níže) je od středu kružnice vzdálený stejně jako je délka poloviny delší základny, je tato základna zároveň průměrem kružnice. Tato kružnice je tedy Thaletovou kružnicí nad průměrem AB, délku AC tedy jednoduše získáme pomocí Pythagorovy věty:

$$
\begin{aligned}
AB^2 - BC^2 &= AC^2 \\
7,3^2 - 4,8^2 &= AC^2 \\
30,25 &= AC^2 \\
5,5 &= AC
\end{aligned}
$$

Obě úhlopříčky tedy mají 5,5.



Úloha 7. *Mějme tabulku se 3×3 poli. Dokažte, že nejde zaplnit čísly 1 – 9 tak, aby součet čísel v každém řádku, sloupci ani úhlopříčce (včetně vedlejších) nebyl dělitelný 3.*

Nejprve si nahraďme všechny naše čísla jejich zbytky po dělení 3. Tato informace je naprosto postačující, neboť právě ona určuje při součtu otázku dělitelnosti. Dále si můžeme vytvořit jednoduchou součtovou tabulku.

	0	1	2
0	0	1	2
1	1	2	0
2	2	0	1

	0	A	B
0	0	A	0
A	A	B	0
B	B	0	A

Z ní je jasně patrné, že zbytky 1 a 2 jsou vzájemně souměrné, tedy nic se nestane, když je vzájemně zaměníme. Bude tedy lepší, označit si je A a B.

Začněme vedlejšími úhlopříčkami. Ty tvoří dohromady čtveřici polí.

Umístěme do jednoho z nich zbytek 0. Pak v sousedním poli musí být A nebo B. Díky oné souměrnosti si však bez újmy na obecnosti můžeme říci, že tam bude zbytek A. Na dalším poli sousedním s A nyní může být buď opět 0 nebo A. Ale na zbývajícím poli již může být opět jen A. Máme tedy prozatím 2 možnosti.

Kdybychom na začátku neumístili 0, ale A, je situace následující. Umístíme-li nyní 0 kamkoliv, dostaneme nějakou ze situací předtím. Na všech ostatních polích tedy musí být opět jen A, ale to být nemůže, protože máme k dispozici A jen 3. Máme tedy opravdu jen předchozí 2 možnosti:

	0	
A		A
	0	

	0	
A		A
	A	

V první variantě musíme do středního pole umístit B, neboť 3A i 30 by daly 0. Nyní musíme do dvou ze čtyř polí umístit 2B. Kdybychom je umístili naproti sobě, vznikne úhlopříčka 3B, což nejde. Musí být tedy ve stejném řádku / sloupci.

Nejprve je umístěme do spodního řádku. Pak v horním řádku musí být na jedné pozici 0 a na druhé A. Ve sloupci, ve kterém bude 0 však vznikne součet A + B + 0, tedy dostáváme spor. Umístěme naše 2B do pravého sloupce. Opět do levého sloupce musíme umístit jednou 0 a jednou A. Stejně však v jednom z řádků vznikne opět součet A + B + 0, čímž dostáváme spor. První variantu tedy máme splněnou.

A	0	0
A	B	A
B	0	B

A	0	B
A	B	A
0	0	B

V druhé variantě musíme do středního pole umístit 0, protože A už jsme vypotřebovali a s B by vznikl součet A + B + 0. Nyní tedy potřebujeme umístit do čtyř polí 3B a jednu 0. Můžeme tedy říci, že ve dvou z okrajových řádků / sloupců bude zároveň B i 0. Tím ale dostáváme spor, protože 3 z okrajových řádků / sloupců obsahují A, tedy v alespoň jednom bude A + B + 0.

Tím jsme dokázali, že skutečně tabulku podle našeho přání zaplnit nelze.