Řešení 5. série

Úloha 1. *Máme pět karet s čísly 3, 4, 5, 6 a 7. Pája si z nich vybrala tři karty a Jája zbývající dvě. Obě dívky vynásobili hodnoty svých karet. Součtem těchto dvou součinů je prvočíslo. Urči součet hodnot Pájiných karet.*

Je celkem 10 možností, jak si Jája s Pájou karty mohly rozebrat. Počet možností lze však ještě snížit, pokud si uvědomíme, že prvočíslo, které v našem případě bude určitě větší než 2, musí být liché. Liché číslo můžeme dostat pouze součtem sudého a lichého čísla. Karty s čísly 4 a 6 tedy musí být ve stejné skupince, protože jinak by oba součiny a následně jejich součet byly sudé. Dále musí být také čísla 3 a 6 pospolu, protože jinak by oba součiny a následně i jejich součet byly dělitelné 3 a tudíž bychom nedostali prvočíslo. Zbyla nám tedy pouze jediná možnost: $3 \cdot 4 \cdot 6 + 5 \cdot 7 = 107$.

Součet hodnot na Pájiných kartách je $3 + 4 + 6 = 13$.

Úloha 2. *Kotel, Maxmilián a jedna z pěti postav stáli na okraji kruhové mýtinky. Kotel s neznámou postavou byly přesně naproti sobě a přesně uprostřed mýtinky seděl pes. Jestliže je úhel, který Maxmilián svírá s kotlem a neznámou postavou roven součtu úhlů Maxmilián-kotel-postava a Maxmilián-postava-kotel, sedí pes blíž ke kotli nebo k postavě?*

Vnitřní úhly trojúhelníku u postav si označíme α a β, úhel u psa γ. Máme tedy rovnici $\alpha + \beta = \gamma$ a zároveň víme, že součet vnitřních úhlů v trojúhelníku je 180^o (platí pro všechny trojúhelníky). Když si za $\alpha + \beta$ dosadíme γ, dostaneme rovnici $2\gamma = 180^o$ a tedy γ je 90^o. Jelikož postavy i pes jsou na okraji louky, je louka opsaná kružnice vytvořenému pravoúhlému trojúhelníku, tedy Thaletova kružnice. Víme, že v tomto případě musí být střed kružnice ve středu strany protější k pravému úhlu a tedy dvě postavy tvoří průměr louky a jejich vzdálenost je tím pádem rovna $4 \cdot 2 = 8$ metrů (poloměr jsme zjistili ze vzdálenosti kotel/střed kružnice a pes/bod kružnice).

Úloha 3. *Vědci měli za úkol do oné lahvičky připravit směs hamónia a radikália. Do směsi dali 25 kuliček hamónia, přičemž 100 kuliček váží 100 gramů. Radikálium mělo tvořit 58% celkové hmotnosti směsi a 100 kuliček radikália váží 150 gramů. Kolik kuliček radikália dali vědci do směsi?*

Nejdříve si vypočítáme hmotnost hamónia, ze které díky znalosti podílu radikália ve směsi dopočítáme hmotnost radikália. Nakonec již není problém ze zadaných informací dopočítat počet potřebných kuliček radikália.

Hmotnost hamónia:

$$m_{hamnium} = 25 \cdot \frac{100}{100}\ g = 25\ g$$

Hmotnost radikália:

$$m_{radiklium} = \frac{25 \cdot 58}{100 - 58}\ g = \frac{1450}{42}\ g = \frac{725}{21}\ g$$

Hledaný počet kuliček radikália je:

$$n_{radiklium} = \frac{m_{radiklium}}{\frac{150}{100}} = \frac{725}{21} \cdot \frac{10}{15} = \frac{7250}{315} = 23$$

Úloha 4. *Nebohé bezejmenné vědce označme A, B, C a D. Počet vteřin, které psovi trvaly, než jednotlivé ubožáky zmasakroval, označme a, b, c a d. Urči, kolik vteřin trvala muka jednotlivých vědců, jestliže platí:*

$$5a - 5c + 17b + 13 = 500 - d$$

$$4a + 2c - 7d + 60 = 0$$

$$2a - 38 = 100 - c$$

$$5a - 28 = 300 - d$$

Zadané rovnice si upravíme do následujících tvarů:

$$5a + 17c - 5b + d = 487$$

$$4a + 2b - 7d = -60$$

$$2a + b = 138$$

$$5a + d = 328$$

Hodnotu d snadno vypočteme z rozdílu druhé a dvojnásobku třetí rovnice:

$$4a + 2b - 7d - 2 \cdot (2a + b) = -336$$

$$d = 48$$

Hodnotu $d = 48$ dosadíme do čtvrté rovnice a získáme a:

$$5a + 48 = 328$$

$$a = 56$$

Stejným způsobem dosadíme hodnotu $a = 56$ do třetí rovnice a získáme b:

$$b + 112 = 138$$

$$b = 26$$

A nakonec dosadíme $a = 56$; $b = 26$; $d = 48$ do první rovnice a získáme $c = 17$.

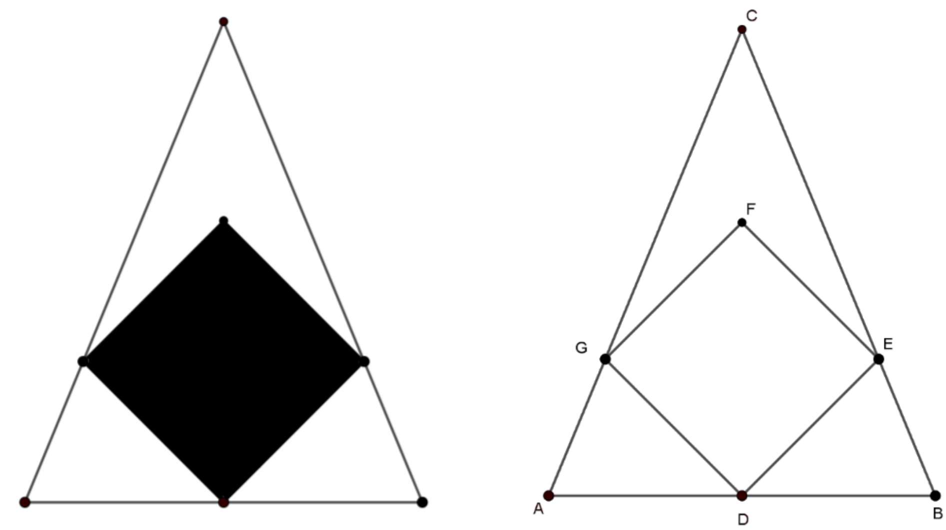
Zmasakrovat jednotlivé vědce tedy trvalo 17, 26, 48 a 56 vteřin.

Úloha 5. *Kolik existuje trojciferných čísel takových, že po oddělání jakékoliv cifry bude vzniklé číslo dávat po dělení třemi zbytek 1?*

Cifry čísla si rozdělíme do zbytkových skupin: 0, 1 a 2. Všechny cifry v našem čísle musí být ve stejné zbytkové skupině, aby po oddělání jakékoliv cifry mělo furt číslo stejný zbytek po dělení třemi. A naší podmínce vyhovuje pouze trojice 222, jelikož odděláme 2 a zbylé dvě číslice budou po sečtení dávat po dělení třemi zbytek 1. Tím pádem vyhovují cifry 2, 5 a 8, tedy tři možnosti na místě stovek, desítek a jednotek. Takže $3 \cdot 3 \cdot 3$ možností, což je 27 možností.

Úloha 6. *Kartáč má tvar rovnoramenného trojúhelníku se špičkou ve vrcholu, kde se setkávají jeho ramena, svírající úhel* 45^o. *Kartáč má černé a bílé štětiny. Černé zabírají plochu vepsaného čtverce, který je znázorněn na obrázku a který má obsah* $49cm^2$. *Kolik* cm^2 *zabírají černé a bílé štětiny dohromady?*

Zadaný trojúhelník si označme následnujícím způsobem:



Nejprve určíme velikosti vnitřních úhlů trojúhelníku ADG. Velikost úhlů při základně AB je rovna $\frac{135}{2} = 67,5$. Úhlopříčka čtverce dělí úhel při vrcholech na poloviny, tudíž $|\angle ADG| = 45^o$. Snadno dopočteme, že $|\angle AGD| = 180 - 67,5 - 45 = 67,5^o$. Trojúhelník ADG je rovnoramenný. Stejně lze ukázat, že trojúhelník DBE je rovnoramenný. Ramena zmíněných trojúhelníků mají délku rovnou délce strany čtverce. Délka strany čtverce je $\sqrt{49} = 7\ cm$. Díky tomu zjistíme, že $|AB| = 2 \cdot 7 = 14\ cm$.

V následujícím kroku ukážeme, že i trojúhelníky GCF a ECF jsou rovnoramenné. Dopočtením do 180^o určíme $|\angle FGC| = 180 - 67,5 - 90 = 22,5^o$. Výška na stranu AB půlí úhel $\angle GDE$ a prochází vrcholy úhlopříčky čtverce (obrazec je symetrický podle výšky). Nyní vidíme, že trojúhelník GCF je rovnoramenný, neboť $|\angle GCF| = \frac{\angle GDE}{2} = 22,5^o = |\angle CGF|$. Stejně bychom ukázali, že trojúhelník ECF je rovnoramenný.

Z předchozího zjištění dokážeme stanovit délku výšky DC (délku úhlopříčky určíme pomocí Pythagorovy věty):

$$|DC| = |DF| + |FC| = |DF| + |FG| = |FG|\sqrt{2} + |FG| = \sqrt{49} \cdot (\sqrt{2} + 1) = 7\sqrt{2} + 7\ cm$$

Celkový obsah trojúhelníku ABC je proto roven:

$$\frac{|AB| \cdot |DC|}{2} = \frac{14 \cdot 7(\sqrt{2} + 1)}{2} = 49 \cdot (\sqrt{2} + 1)\ cm^2$$

Černé a bílé štětiny dohromady zabírají $49 \cdot (\sqrt{2} + 1)\ cm^2$.

Úloha 7. *Hlavní budova má 6 pater a schody na střechu. Na pravé a levé straně každého patra jsou schodiště. Zároveň v budově lze použít výtah. Kolika způsoby se můžeme dostat z prvního patra na střechu, jestliže výtahem musíme ujet alespoň jedno patro, přičemž rozlišujeme pravé a levé schodiště? (například pokud půjdeme z prvního patra do třetího nejprve pravým a pak levým, cesta nejprve levým a až potom pravým schodištěm je odlišná).*

Místo toho, abychom počítali jednotlivé možnosti z počtů ujetých pater výtahem, uděláme to, že spočítáme počet všech možností, jak se dostat do 7. patra z 1. patra a od tohoto čísla odečteme možnosti, kdy nepojedeme ani jednou výtahem.

Na každém patře máme tři možnosti (pravé/levé schodiště a výtah). Celkový počet způsobů, jak se dostat do posledního patra z naší výchozí pozice, odpovídá tak $S_C = 3^6$. Pokud nepojedeme ani jednou výtahem, máme na výběr v každém patře pouze dvě možnosti, a tak počet možností bez výtahu je $S_0 = 2^6$.

Žádaná odpověď na úlohu zní $S_C - S_0 = 665$ možností.