Řešení 4. série

Úloha 1. *Skupina danžrů stála v řadách. Od nejbližší řady se směrem dozadu počet jednotlivých danžrů v řadě zvětšoval. Řad bylo pět a počty v nich tvořily aritmetickou posloupnost. Víme, že součet danžrů v prvních dvou řadách je roven počtu danžrů v poslední nejvzdálenější řadě zmenšenému o* 1. *Také právě* 2 *dvojice počtů danžrů v jedné řadě se liší o* 12. *Kolik danžrů je v jednotlivých řadách?*

Označme nejmenší počet danžrů v jedné řadě a a rozdíl k. Aritmetická posloupnost bude ve tvaru a; $a+k$; $a+2k$; $a+3k$; $a+4k$. Můžeme poté sestavit rovnici:

$$a + (a + k) = a + 4k - 1$$

Z ní snadno vyjádříme rovnici: $a = 3k - 1$. Aby se právě dvě dvojice lišily, musí se jednat o dvojice $a, a+3k$ a $a+k, a+4k$. Dostáváme se tedy k rovnici $a + 3k - a = 12$, z níž snadno určíme $k = 4$. Dosadíme jej do první rovnice a získáme $a = 12 - 1 = 11$.

Poté snadno doplníme celou posloupnost: $11, 15, 19, 23, 27$.

Úloha 2. *Františka nenapadl lepší způsob, jak realizovat danžrovy představy, než výřivka ve tvaru pravidelného mnohoúhelníku. Velikost vnitřních úhlů by měla být* 156^o. *Kolik danžrů se do takové výřivky vejde, jestliže má být v každém rohu právě jeden danžr?*

Pro určení o jaký mnohoúhelník se jedná můžeme použít následující rovnici: $\frac{180x-360}{x} = 156$, kterou budeme dále upravovat.

$$180x - 360 = 156x$$

$$24x = 360$$

$$x = 15$$

Výřivka má tedy tvar patnáctiúhelníku, čili se do ní vejde právě 15 danžrů.

Úloha 3. *V klobouku se nachází 15 bílých kuliček a 18 černých. Každé kolo vytáhnou obě sestry po jedné kuličce. Pokud jsou kuličky stejné barvy, nahradí je jednou černou, pokud vytáhnou dvě kuličky různé barvy, nahradí je jednou bílou. Jaká barva zbyde v klobouku jako poslední?*

Musíme si rozepsat všechny změny, které mohou v klobouku nastat. Když vytáhneme:

- Dvě bílé – z klobouku ubydou dvě bílé ($-2B$) a přibude jedna černá ($+1C$)
- Dvě černé - $-2C + 1C = -1C$
- Jednu černou a jednu bílou - $-1B - 1C + 1B = -1C$

Nyní si můžeme všimnout dvou věcí, jež obě vedou ke správnému řešení.

Můžeme si všimnout, že jediná změna co se může stát s počtem bílých v klobouku je, že se sníží o dva. A vzhledem k tomu, že bílých je na začátku 15, tak se nemůže dostat do situace, že zbyde 0 bílých. Při pouhém odečítání dvojky se nemůže stát, že by se z lichého čísla stalo sudé.

Druhá věc, které si můžeme všimnout, je, že počet černých se mění vždy o jedna. Tudíž po každém vytahování se změní počet černých z lichého čísla na sudé a obráceně. Než se dostaneme k poslední kuličce, budeme táhnout celkem 32 krát, neboť máme 33 kuliček. A po 32 bude počet černých sudý, tudíž tam nemůže zbýt jedna černá kulička.

Jako poslední v klobouku zbyde bílá kulička.

Úloha 4. *Zjisti, kolik je všech čtyřmístných palindromů, které jsou dělitelné třemi.*

Číslo ve tvaru $\overline{abba}$ je dělitelné 3, pokud je $2a + 2b$ dělitelné třemi. A protože násobení dvěma neovlivňuje dělitelnost třemi, stačí ověřovat jestli 3 dělí a+b.

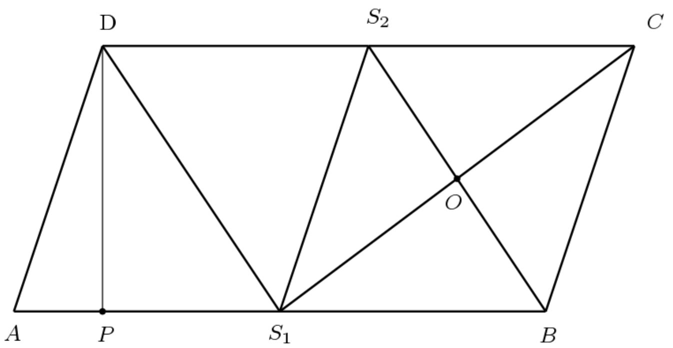
Abychom zjistili, kolik je dvojciferných čísel dělitelných 3, vydělíme se zbytkem 100 a poté odečteme započítaná jednociferná čísla:

$$100 : 3 - 10 : 3 = 30.$$

Čtyřmístných palindromů je tedy 30.

Úloha 5. *Záhon porostlý mechem měl tvar čtyřúhelníku. V rozích tohoto záhonu byly popořadě zaražené tyče - azurová, bílá, celkem zelená a duhová. Uprostřed mezi azurovou a bílou tyči je zasazený malý kaktus a uprostřed mezi celkem zelenou a duhovou tyčí je zasazený velký kaktus. Od malého kaktusu k celkem zelené tyči vede rovná zavlažovací roura, stejně tak od velkého kaktusu k bílé tyči. V místě, kde se roury kříží, je malé paraplíčko, které obě roury půlí. Zároveň úhel, který paraplíčko svírá s malým kaktusem a bílou tyčí, je pravý. Malý kaktus, duhová tyč a azurová tyč tvoří trojúhelník, v jehož patě výšky na stranu azurová tyč-malý kaktus z vrcholu v duhové tyči náhodně roste opuštěná pampeliška. Vzdálenost mezi pampeliškou a duhovou tyčí je 5 metrů a vzdálenost mezi bílou a azurovou tyčí je 12 metrů. Jaký je obsah tohoto překrásného záhonu?*

Zadaný záhod si označme stejně jako na následujícím obrázku:



Trojúhelníky $S_1BO, S_1S_2O, CS_2O, CBO$ jsou shodné podle věty sus. Čtyřúhelník S_1BCS_2 je tak kosočtverec. Z toho dostáváme, že $|S_1B| = |S_2C| = |S_1S_2| = |BC| = 12 : 2 = 6\ m$. Dále, jelikož S_1BCS_2 je kosočtverec, jsou úsečky S_1B a S_2C rovnoběžné, a tak i AB k CD. Výška DP je zároveň výškou v trojúhelníku DS_2S_1 a v kosočtverci S_1BCS_2. Výsledný obsah S tak spočteme jako: $S = S_{AS_1D} + S_{DS_1S_2} + S_{S_1BCS_2} = \frac{6 \cdot 5}{2} + \frac{6 \cdot 5}{2} + 6 \cdot 5 = 60$ m^2.

Úloha 6. *Píta má* 2551500 *semínek kantuelky zlaté. Použít chce všechna semínka a to právě tak, aby záhony kantuelek byly stejně velké čtverce, tzn. vysadí kantuelky do řad za sebe a počet kantuelek v řádku musí být stejný jako počet řádků. Kolika způsoby může Píta semínka vysázet?*

Počet způsobů jak semínka vysázet, je vlastně počet dělitelů 2551500, kteří jsou druhou mocninou nějakého přirozeného čísla.

Nejprve 2551500 rozložíme na prvočísla $2551500 = 7\cdot5\cdot5\cdot5\cdot3\cdot3\cdot3\cdot3\cdot3\cdot3\cdot2\cdot2 = 7\cdot5^3\cdot3^6\cdot2^2$. Když rozkládáme na prvočísla druhou mocninu, vždy v rozkladu dostaneme prvočísla pouze v sudých mocninách, neboť velikost mocnin se při umocnění na druhou sčítá, např $14 = 2\cdot7$ a $14\cdot14 = 2\cdot7\cdot2\cdot7 = 2^2\cdot7^2$. Tudíž nám stačí zjistit počet dělitelů čísla 2551500, pro které platí, že i jejich druhá mocnina dělí 2551500. Tyto dělitelé tudíž v sobě můžou mít pouze 5, třikrát 3, a 2. Takže počet těchto dělitelů je $2\cdot4\cdot2 = 16$, neboť 5 můžeme použít jednou nebo nulakrát (2 možnosti), 3 jednou, dvakrát, třikrát nebo nulakrát (4 možnosti) a 1 můžeme též použít jednou nebo nulakrát.

Píta může semínka vysázet 16 způsoby.

Úloha 7. *Nalezni všechny trojice přirozených čísel* (a, b, c)*, pro která platí* $abc = 1365$ *a zároveň hodnota výrazu:*

$$\frac{a}{\frac{1}{b}+\frac{1}{c}}$$

je celočíselná.

Čísla a, b, c jsou přirozená, a jelikož $abc = 1365$, musí být děliteli čísla 1365, jehož rozklad na součin prvočísel odpovídá $1365 = 3\cdot5\cdot7\cdot13$. Zároveň je dělitelem čísla 1365 i 1. Všimněme si, že jsou všichni dělitelé lichá čísla. Posledně jmenované vlastnosti totiž brzy využijeme. Nyní pojd'me nahlédnout na výraz v zadání a trochu si ho poupravme:

$$\frac{a}{\frac{1}{b}+\frac{1}{c}} = \frac{a}{\frac{b+c}{bc}} = \frac{abc}{b+c} = \frac{1365}{b+c}$$

Hodnota $b+c$ bude vždy sudé číslo, nebot', jak bylo řečeno, jsou čísla a, b, c lichá. Žádné sudé číslo ale nemůže dělit 1365, jelikož se jedná o liché číslo. Ke řstejnému výsledku bychom se propracovali i vyzkoušením všech možnýchch součtů $b+c$, nicméně tento postup by byl pracnější a při vyšších číslech nepoužitelný.

Zadání nesplňuje žádná trojice (a, b, c).