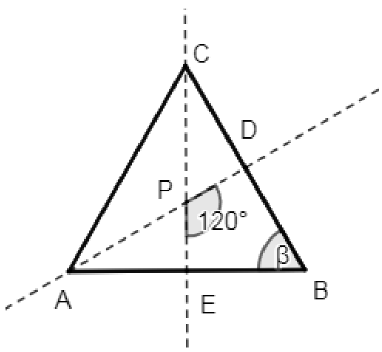
Řešení 3. série

Úloha 1. *Jája říká: „Jsem nejstarší.“ Pája na to reaguje: „Nejsem ani nejmladší ani nejstarší.“ František povídá: „Nejsem nejmladší.“ Maxmilián doplňuje: „Jsem nejmladší.“ Někdo z nich lhal. Kdo z nich to byl? Své tvrzení řádně zdůvodni.*

Stačí postupovat vylučovací metodou. Pokud by lhal Maxmilián, ostatní by museli mluvit pravdu a nikdo by nebyl nejmladší, což není možné. Pokud by lhala Pája a ostatní by mluvili pravdu, byla by Pája buď nejmladší, nebo nejstarší, takže Maxmilián nebo Jája by také museli lhát, což nelze. Pokud by lhal František a ostatní mluvili pravdu, byl by František nejmladší a spolu s ním by musel také lhát Maxmilián, což také nelze. Lhát tedy musela Jája a snadno zjistíme, že tato možnost všem podmínkám vyhovuje.

Úloha 2. *Květináč s kaktusy má při pohledu seshora tvar rovnoramenného trojúhelníku, jehož základna se celá dotýká zdi pod oknem. Z rohu květináče, který se zdi nedotýká, jde rovně okrasná stuha až po okraj květináče. Stejně tak z jednoho ze zbylých dvou rohů květináče jde jiná stuha rovně až po okraj květináče. Obě stuhy půlí úhly, které jsou v rozích, odkud stuhy vychází. V místě, kde se stuhy kříží, je zapíchnutý okrasný špendlík. Do třetího rohu, kde není žádná stuha, chce dát Píta srdíčko tak, aby jeho cíp celý roh zaplňoval. Jak velký úhel musí Píta cípu srdíčka dát, jestliže úhel naproti prázdnému rohu, který svírají stuhy, je 120^o?*

Označme si zadaný rovnoramenný trojúhelník jako ABC se základnou AB. Průsečík os úhlů CAB a BCA označme P a průsečíky se stranami BC a AB v pořadí D a E. Velikost uhlu $\sphericalangle EPD$ je 120^o. Zjišťujeme velikost úhlu $\sphericalangle ABC$.



V rovnoramenném trojúhelníku je osa úhlu naproti podstavě zároveň výškou. Proto $|\sphericalangle AEC| = 90^o$. Další úhly dopočteme následovně:

$$|\sphericalangle APE| = 180^o - 120^o = 60^o$$

$$|\sphericalangle PAE| = 180^o - |\sphericalangle APE| - |\sphericalangle PEA| = 30^o$$

$$|\sphericalangle PAC| = |\sphericalangle PAE| = 30^o$$

$$|\sphericalangle CAB| = 60^o = |\sphericalangle ABC|$$

Velikost úhlu $\sphericalangle ABC$ je tedy 60^o.

Úloha 3. *Nalezni všechna trojciferná čísla, která jsou středově souměrná, bráno napsané digitálně (například 202), a zároveň jsou dělitelná devíti.*

Nejprve si najdeme všechna cifry, které můžeme použít, aby bylo číslo středově souměrné. Což je $1, 2, 5, 6, 8$ a 9. Teď si jednoduše rozepišme jednotlivé možností. Začneme možností, že hledané číslo začíná 1, tudíž musí i končit na 1. Součet těchto čísel je $1 + 1 = 2$. Jelikož má být číslo dělitelné devíti musí být i ciferný součet dělitelný devíti, proto bude prostřední číslo $9 - 2 = 7$. Číslo 7 ovšem není středově souměrné.

U dalších možností budeme postupovat obdobně:

- Číslo bude začínat i končit 2. Prostřední cifra bude $9 - 4 = 5$, která středově souměrná je $\Rightarrow$ jedno z hledaných čísel je 252.
- Číslo bude začínat i končit 5. Prostřední cifra tedy musí být $18 - 10 = 8$, která je středově souměrná $\Rightarrow$ jedno z hledaných čísel je 585.
- Číslo bude začínat 6 a končit 9. Prostřední cifra tedy musí být $18 - 15 = 3$, která není středově souměrná.
- Číslo bude začínat i končit 8. Prostřední cifra bude $18 - 16 = 2$, která je středově souměrná $\Rightarrow$ jedno hledaných čísel je 828.
- Číslo bude začínat 9 a končit 6. Prostřední cifra tedy musí být 18-15=3, která není středově souměrná, takže to nelze.

Úloha má tedy tři řešení 252, 585 a 828.

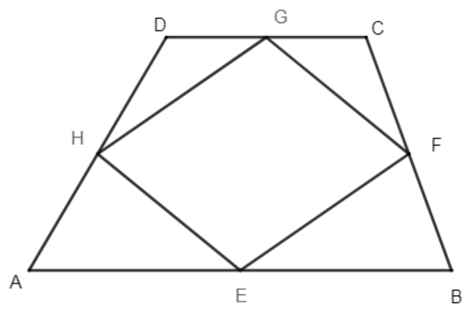
Úloha 4. *Kůrovníci ve skupině, kterou Píta označil číslem II, tvoří $\frac{6}{5}$ kůrovníků ze skupiny I. Kůrovníků ze skupiny označenou číslem III je o 12 míň než kůrovníků ve skupině II. Pro jednu ze skupin platí, že pokud vyndáme takový počet kůrovníků abychom měli jistotu, že mezi nimi budou tři kůrovníci s tímto stupněm onemocnění, zbude v ohradě 12 kůrovníků. Zjisti, o který stupeň onemocnění jde, víte-li, že zcela zdravých kůrovníků je víc než občasně problémových a nejvíc je kůrovníků s nejvyšším stupněm nemoci.*

Kůrovníků hledané skupiny je 15, protože abychom měli jistotu, že vyndáme tři kůrovníky této skupiny, musíme nejprve vynadat všechny ostatní kůrovníky s jiným stupněm onemocnění, a potom ještě další tři. Tento počet určitě nemůžou tvořit kůrovníci skupin II a III, protože ty musí být nutně dělitelné šesti a to patnáct není.

Hledanou skupinou onemocnění je tedy I.

Úloha 5. *Ohrada kůrovníků má tvar lichoběžníku. Jája s Pájou natahovaly lana spojující středy dvou sousedních stran ohrady, kde následně zatlučou dřevěná prkna, zatímco František hlídal kůrovníky. Dokaž, že vzniklý prostor ohraničený lany je rovnoběžník.*

Zadaný lichoběžník si označme stejně jako na následujícím obrázku:



Úsečka HG je střední příčkou trojúhelníku ACD, a proto musí být rovnoběžná s AC. Úsečka EF je střední příčkou trojúhelníku ABC, a proto musí být také rovnoběžná s AC, tudíž je HG rovnoběžná s EF.

Úsečka GF je střední příčkou trojúhelníku DBC, a proto musí být rovnoběžná s DB. Úsečka HE je střední příčkou trojúhelníku ABD, a proto musí být také rovnoběžná s DB, tudíž je GF rovnoběžná s HE. Takže je $EFGH$ rovnoběžník.

Úloha 6. *A pak vyberte tu flašku, která má na sobě stejné číslo, jako je poslední cifra součtu druhých mocnin prvních 123 přirozených čísel. Flašku s jakým číslem nakonec otevřeli?*

Druhé mocniny přirozených čísel končí na jednu z deseti existujících cifer, které se pravidelně opakují. Stačí si zjistit, na které cifry budou končit druhé mocniny jednociferných čísel. Zjistíme, že součet všech posledních cifer druhých mocnin je 45. Tento součet bude dávat každých deset ze sčítaných čísel. Výnásobíme jej tedy dvanácti ($120 : 10 = 12$) a přičteme zbylé poslední cifry mocnin čísel 1, 2, 3, které mají v součtu 14. Celkem tedy $45 \cdot 12 + 14 = 554$. Jelikož je zde poslední cifra 4, bude i poslední cifra součtu druhých mocnin prvních 123 přirozených čísel 4.

Úloha 7. *Zajímavostí séra je, že součet dělitelů čísla udávajícího počet ingrediencí je zároveň číslo značící počet mililitrů séra, které z těchto ingrediencí je. Zaměstnanci zatím vyrobili 13740 ml séra a použili lichý počet ingrediencí, který není dělitelný třemi. Kolik ml séra chtějí získat, jestliže potřebují třikrát tolik ingrediencí?*

Úloha se může jevit na první pohled složitě. Ovšem stačí si uvědomit, že jelikož zadaný počet ingrediencí není dělitelný 3 bude platit, že dělitelé třikrát většího čísla budou ty samá čísla jako u původního (o nichž víme, že jejich součet je 13740) plus čísla 3 krát větší (jejich součet tedy musí být $13740 \cdot 3$).

Hledaný počet ml séra tedy je $13740 + 3 \cdot 13740 = 54960$.

Úloha 7. z 1. série *Sestry si chtěly zahrát piškvorky, ale ty klasické se jim zdály moc nudné. Proto se rozhodly hrát speciální trojúhelníkové piškvorky. Pravidla jsou téměř stejná jako u normálních piškvorek, nehrají se však na čtvercové síti, ale na nekonečné trojúhelníkové ploše. Vyhrává ta sestra, které se jako první podaří udělat ze svých symbolů trojúhelník o straně 2. Pája má trochu strach, že bude ve velké nevýhodě, protože Jája začíná. Pomozte Páje rozhodnout, zda má remizovací strategii. remizovací strategie znamená, že Pája může hrát tak, aby Jája nevyhrála, ať už bude hrát jakkoli dobře. Pokud strategie existuje, tak ji Páje popište a vysvětlete, proč je tato strategie opravdu remizovací. V opačném případě dokažte, že remizovací strategie neexistuje.*

Ano, remízovací strategie skutečně existuje. A není ani nijak složitá. Páje stačí, aby ve svém tahu vždy doplnila trojúhelník podle osy k trojúhelníku právě položenému Jájou. Tímto způsobem se Jáje nikdy požadovaný trojúhelník nepodaří složit a hra vždy skončí remízou.