Řešení Páté Série

Úloha 1. *Během profesorova měření unikala antihmota celkem sedmkrát. Zajímavé bylo, že pokud byl únik zaznamenán dopoledne, odpoledne tentýž den už žádný detekován nebyl. Stejně tak, pokud antihmota unikala odpoledne, dopoledne téhož dne byl zdroj neaktivní. Úniky byly zaznamenány nejvýše jednou denně. Celkem bylo zaznamenáno 5 dopoledních aktivit a 6 odpoledních aktivit. Určete nejmenší počet dní, které mohlo profesorovo měření trvat.*

U této úlohy se vám musíme velice omluvit, jelikož zadání bylo úplně celé špatně. Úlohu jsem tedy bodoval tak, že pokud jste se pokusili popasovat s kompletním zadáním, tak jste dostali 5 bodů a pokud jste si z něj vybrali jen část, která se vám líbila, tak jsem dal jen 3 body (přišlo mi nespravedlivé dát všem 5, když určitě někteří z vás úlohu neřešili právě proto, že nedávala smysl). Pro zajímavost uvedu správné zadání úlohy:

Profesor měřil úniky antihmoty. Úniky měřil několik dní v řadě vždy dopoledne a odpoledne a únik byl zaznamenán vždy nejvýše jednou denně. Během měření antihmota unikla celkem sedmkrát, zajímavé bylo, že pokud únik naměřil dopoledne, tak odpoledne naměřen nebyl a naopak pokud únik naměřil odpoledne, tak dopoledne naměřen nebyl. Navíc bylo alespoň 5 dopolední a alespoň 6 odpolední, kdy profesor únik nenaměřil. Určete nejmenší počet dní, které mohlo měření trvat.

Úloha 2. *SARA se rozhodla, že si pro jistotu zapamatuje, jak dlouhý by musel být předmět, který by přímo zapadl do díry. Kvádr má rozměry $a = 8$ cm, $b = 9$ cm, $c = 12$ cm. Jak je dlouhá tělesová úhlopříčka (spojnice některých dvou nejvzdálenějších vrcholů) tohoto kvádru?*

Tělesová úhlopříčka není nic jiného než přepona pravoúhlého trojúhelníku, jehož odvěsny jsou tvořeny jednou stěnovou úhlopříčkou a jednou hranou kvádru. Tělesová úhlopříčka lze tedy spočítat pomocí dvou výpočtů využitím Pythagorovy věty. Zde je uvedena jedna z možností cesty ke správnému výsledku:

Spočítáme si délku stěnové úhlopříčky procházející stěnou, která má délky hran $b = 9$ cm a $c = 12$ cm:

$$u_s = \sqrt{b^2 + c^2} = \sqrt{9^2 + 12^2} = \sqrt{81 + 144} = \sqrt{225} = 15.$$

Vypočítaná úhlopříčka $u_s = 15$ cm spolu s hranou kvádru $a = 8$ cm jsou odvěsny pravoúhlého trojúhelníku, jehož přeponou je tělesová úhlopříčka kvádru. Tu jsme nyní schopni spočítat:

$$u_t = \sqrt{u_s^2 + a^2} = \sqrt{15^2 + 8^2} = \sqrt{225 + 64} = \sqrt{289} = 17.$$

Délka tělesové úhlopříčky je tedy 17 cm.

Úloha 3. *Jako a označme číslo, které představuje symbol smrti, a jako b označme číslo, které představuje symbol života. Aby se takové dva symboly vyrušily, musí platit, že $a + b = 1$ a zároveň $a \cdot b = -30$. Najděte všechny uspořádané dvojice celých čísel a, b takové, aby splňovaly tyto rovnice.*

Začněme rovnicí $ab = -30$. Protože součin čísel a, b je záporný, musí být záporný právě jeden z činitelů. Zároveň také víme, že jsou čísla a, b celá. Na základě těchto poznatků si vypíšeme všechny vyhovující (neuspořádané, jelikož neznámé a a b můžeme v rovnicích libovolně zaměnit) dvojice: $(a, b) \in \{(-1, 30), (1, -30), (-2, 15), (2, -15), (-3, 10), (3, -10), (5, -6), (-5, 6)\}$.

Aby některá z těchto dvojic byla řešením soustavy, musí vyhovovat také rovnici $a + b = 1$. Tomu odpovídají pouze dvojice $(-5, 6)$ a $(6, -5)$. Tím dostáváme – zohledníme-li pořadí a a b – čtyři možná řešení: $a = -5, b = 6$, $a = 5, b = -6$, $a = -6, b = 5$, $a = 6, b = -5$.

Úloha 4. *Pro zrušení spoutávajícího kouzla potřebuje SARA jednu z uspořádaných trojic prvočísel (p, q, r), pro které platí, že $p+q = r^2$, $r+p = q^2$ a také $q+r = p^2$. Najděte všechny takovéto uspořádané trojice, které musí SARA vyzkoušet.*

Předpokládejme, že prvočísla p, q, r jsou všechna lichá. Pak součet $p + q$ je sudý, ale q^2 je lichý, tedy se nemohou rovnat, což je ve sporu se zadáním.

Dále předpokládejme, že právě jedno z prvočísel je sudé, tedy je to dvojka. Nezáleží na tom, které si zvolíme, soustava je totiž tzv. symetrická: pokud bychom neznámé libovolně „popřeházeli“ (např. dosadili q za p, r za q a p za r), dostali bychom stejné tři rovnice. Bez újmy na obecnosti tedy položme $p = 2$. Potom $q + r = 4$, ale jelikož q, r jsou obě lichá, musí platit $q \geq 3$ a $r \geq 3$, a proto $q + r \geq 6$ a zároveň $q + r = 4$, což není možné.

Vidíme tedy, že alespoň dvě z prvočísel jsou rovna dvěma, bez újmy na obecnosti položme $p = q = 2$. Pak ale $r^2 = p + q = 4$, tedy i $r = 2$. Po zkoušce vidíme, že jediným vyhovujícím řešením je opravdu $p = q = r = 2$.

Úloha 5. *Označme magickou bariéru jako přímku p a start a cíl teleportace jako body A, B ležící v opačných polorovinách vymezených touto přímkou. Najděte takový bod P ležící na přímce p, aby velikost úhlu APX byla rovna velikosti úhlu BPX, kde X je libovolný bod na přímce p. Určete postup konstrukce řešení, když platí, že vzdálenosti A od přímky p a B od přímky p jsou různé.*

Pokud má pro libovolný bod X na přímce p platit, že $|\measuredangle APX| = |\measuredangle BPX|$, tak to znamená, že přímka p je osou úhlu APB. Pro osu úhlu obecně platí, že pokud podle ní v osové souměrnosti zobrazíme jedno rameno úhlu, tak dostaneme to druhé. Tedy pokud označíme B' obraz bodu B v osové souměrnosti podle přímky p, tak musí ležet na přímce AP, tedy body A, P a B' leží na jedné přímce. Ale bod B' zvládneme sestrojit, na to nám stačí sestrojit obraz bodu B v osové souměrnosti podle přímky p. Sestrojíme-li tedy přímku AB', hledaný bod P bude průsečíkem přímek p a AB'.

Úloha 6. *Mějme 3 komáří klonové vojáky (to znamená, že jsou naprosto identičtí a nedokážeme je odlišit). Komáří bojovníci jdou vždy do bitvy v kompletní zbroji složené z helmy, hrudního plátu a ochrany na křídla. Pokud máme k dispozici 7 různých helem, 8 různých hrudních plátů a 10 různých ochran na křídla, kolika způsoby můžeme vystrojit všechny komáří bojovníky a vybrat z nich jednoho velitele? (Dvě takto vytvořené skupiny považujeme za různé, pokud mají velitelé aspoň jeden odlišný kus uniformy nebo se dvojice zbylých bojovníků liší aspoň v jednom kusu uniformy.)*

Nejdříve určeme, kolika způsoby můžeme vybrat 3 různé helmy. Na první pozici můžeme vybrat jednu ze 7 helem, na druhou pozici jednu ze zbývajících 6 a na třetí pozici jednu ze zbývajících 5. Celkem tedy bude $7 \cdot 6 \cdot 5$ způsobů. Takto ovšem počítáme výběr helem ABC i výběr CBA, přestože oba výběry obsahují stejné helmy. Počet uspořádání konkrétní trojce helem je 6 (ABC, ACB, BAC, BCA, CAB, CBA) takže celkový počet různých výběrů 3 helem ze 7 je $\frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{6} = 7 \cdot 5 = 35$.

Pro každou trojici helem dále vyberme hrudní pláty. Pro první helmu můžeme vybrat z 8 hrudních plátů, pro druhý ze 7 hrudních plátů a pro třetí z 6 hrudních plátů a proto bude pro jednu trojici helem $8 \cdot 7 \cdot 6 = 336$ různých výběrů hrudních plátů (již nedělíme 6, protože nám záleží na pořadí plátů – přiřazujeme je k různým helmám). Obdobně vybereme $10 \cdot 9 \cdot 8 = 720$ způsoby pro každou trojici helem a hrudních plátů jednu trojici ochran na křídla. Ve výsledku tedy existuje $35 \cdot 336 \cdot 720 = 8647200$ různých kombinací uniforem pro tři komáry. Pro každou trojici uniforem navíc můžeme vybrat jednu ze tří, která bude pro velitele. Proto bude celkový počet různých bojových skupin $8647200 \cdot 3 = 25401600$.

Úloha 7. *Nechť pro dvě kladná reálná čísla platí $a + b = 1$. Najděte nejmenší hodnotu výrazu $\frac{1}{a} + \frac{1}{b}$.*

Úlohu lze řešit mnoha způsoby. Uvedu zde dva, první je moje autorské řešení a druhý je (mírně modifikovaný) postup Míši Halaštové, který se mi velmi líbil a patřil k jednomu z velmi mála zcela správných řešení.

První postup. Zkoumaný výraz si upravíme následujícím způsobem:

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=(\frac{1}{a}+\frac{1}{b})\cdot 1=(\frac{1}{a}+\frac{1}{b})(a+b)=2+\frac{a}{b}+\frac{b}{a}.$$

Jistě pro libovolná kladná reálná čísla a, b platí nerovnost $(a-b)^2 \geq 0$. Úpravou tohoto vztahu dostáváme nerovnost $a^2+b^2 \geq 2ab$. Jelikož ab je kladné reálné číslo, můžeme jím nerovnost vydělit a dostáváme $\frac{a^2}{ab}+\frac{b^2}{ab} \geq 2$, po zkrácení $\frac{a}{b}+\frac{b}{a} \geq 2$. Dohromady s předchozím tedy $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=2+\frac{a}{b}+\frac{b}{a} \geq 2+2=4$, což je tedy hledaná nejmenší hodnota, které je možnost dosáhnout při volbě $a=b=\frac{1}{2}$.

Druhý postup. Zkoumaný výraz si upravíme následujícím způsobem:

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{a+b}{ab}=\frac{1}{ab}.$$

Minimalizovat hodnotu výrazu $\frac{1}{ab}$ znamená totéž jako maximalizovat hodnotu výrazu ab. Jelikož $a+b=1$, můžeme psát $a=\frac{1}{2}+\epsilon$ a $b=\frac{1}{2}-\epsilon$ pro vhodné reálné číslo ϵ. Potom tedy $ab=(\frac{1}{2}+\epsilon)(\frac{1}{2}-\epsilon)=\frac{1}{4}-\epsilon^2 \leq \frac{1}{4}$. Pak však $\frac{1}{ab} \geq 4$ a to je tedy hledaná nejmenší hodnota.