Řešení První Série

Úloha 1. *SARA bleskově proskenovala všechnu techniku v místnosti. V místnosti se nacházely monitory a počítače, některé fungující bezdrátově, jiné připojené kabely. Jakou část techniky tvořily bezdrátové monitory, pokud jedna osmina přístrojů* ***není*** *bezdrátová a tři sedminy bezdrátových přístrojů tvoří počítače?*

Jestliže osmina přístrojů není bezdrátová, pak sedm osmin přístrojů bezdrátových je. Označíme-li si tedy P počet přístrojů celkem a B počet těch bezdrátových, platí $B = \frac{7}{8} \cdot P$. Z bezdrátových přístrojů tvoří tři sedminy počítače, tedy zbývající čtyři sedminy jsou tvořeny monitory. Bezdrátových monitorů je tedy $\frac{4}{7} \cdot B = \frac{4}{7} \cdot \frac{7}{8} \cdot P = \frac{4}{8} \cdot P = \frac{1}{2} \cdot P$. Bezdrátové monitory tedy tvoří polovinu veškerých přístrojů.

Úloha 2. *Profesorovo vznášedlo je vlastně létající skútr, který ovládá autopilot. Aby správně fungoval, musí být jeho čtvercový ovládací panel vyplněn sedmi hady z čísel 1 až 9 popořadě. Sousedící čísla v jednom hadovi spolu musí sdílet jednu stranu, nestačí roh. Přitom musí platit, že v celé tabulce se žádné číslo ani diagonálně nedotýká stejného čísla. Proškrtnuté políčko nesmí být vyplněno žádným číslem.*

		1		4		2	
		7		X	5		
5			3				
	7					3	
		6			1		
	5			6	5		8
7							
	9			8			

Úloze vyhovuje vyplnění následující:

3	2	1	5	4	3	2	1
4	8	7	6	X	5	4	3
5	9	2	3	7	6	1	2
6	7	1	4	8	2	3	4
9	8	6	5	9	1	6	5
6	5	7	8	6	5	7	8
7	4	3	9	7	4	3	9
8	9	2	1	8	9	2	1

Úloha 3. *Představme si kouzelnou krabičku. Pokud do této krabičky vložíme některé přirozené číslo n, na víčku krabičky se objeví nějaké nezáporné celé číslo m, které je menší nebo rovno než (n-1)(n-1)/n. Navíc platí, že pro každou dvojici různých čísel, která do krabičky vložíme, nám krabička ukáže různá čísla. Zjistěte, jestli taková krabička může existovat.*

Pokud do krabičky vložíme číslo 1, výsledné číslo je menší nebo rovno číslu $\frac{0 \cdot 0}{1} = 0$; výsledným číslem je tedy 0. Pokud do krabičky vložíme číslo 2, je výsledné číslo menší nebo rovno číslu $\frac{1 \cdot 1}{2} = \frac{1}{2}$, a jelikož je toto číslo přirozené, může to být pouze nula, stejně jako když do krabičky vložíme číslo 1. To ovšem nemůže podle zadání nastat, a proto taková krabička nemůže existovat.

Úloha 4. *V každém čtverci za ovládacím panelem je určitý počet rezistorů. Z některých čtverců však úplně vypadly a panel je nyní nefunkční. Doplňte správné počty rezistorů do prázdných polí tak, aby byl jejich součet v každém čtverci 2x2 stejný.*

	1	4	
	6		5
1		2	
	8	5	

Označme s počet rezistorů v libovolném čtverci 2x2 (víme, že je vždy stejný). Podívejme se na čtverec 2x2 nahoře uprostřed a označme si x počet rezistorů v posledním čtverečku, který je nevyplněný. Nyní se podívejme na čtverec 2x2, který je uprostřed dole a y označme počet rezistorů v posledním nevyplněném čtverečku tohoto čtverce. Z čtverce, který je nahoře uprostřed dostáváme $x+1+6+4 = s$, tedy $x + 11 = s$. Z prostředního čtverce dostáváme $x + y + 8 = s$, ze čtverce, který je dole uprostřed pak $y + 15 = s$. Porovnejme první dvě rovnice: $x + 11 = s = x + y + 8$, tedy $y + 8 = 11$ a $y = 3$. Ze třetí rovnice tedy pak $s = 15 + y = 15 + 3 = 18$, z druhé $x = s - y - 8 = 18 - 3 - 8 = 7$.

Nyní už je možné dopočítat ostatní hodnoty (vždy najdeme čtverec 2x2, kde již známe tři hodnoty a jelikož známe s, můžeme dopočítat čtvrtou). Výsledek vypadá následovně:

3	1	4	2
8	6	7	5
1	3	2	4
6	8	5	7

Úloha 5. *Dokažte, že pro všechna reálná x a y platí: $y(y+1) + x \geq (x+y)(y-x+1)$.*

Roznásobíme obě strany nerovnosti: $y^2 + y + x \geq xy - x^2 + x + y^2 - xy + y$, po úpravě $y^2 + y + x \geq y^2 + y + x - x^2$. Od obou stran nerovnosti nyní můžeme odečíst výraz $y^2 + x + y$ (je to ekvivalentní úprava) a dostáváme $0 \geq -x^2$ (můžeme ještě pro větší přehlednost upravit na $x^2 \geq 0$), což jistě platí pro všechna reálná x, protože kdyby bylo $x = 0$, tak $x^2 = 0$ a nerovnost je splněna, pokud bude x kladné číslo, tak je x^2 součin dvou kladných čísel, který je kladný a nerovnost je tedy splněna. A do třetice: pokud bude x záporné číslo, tak je x^2 součin dvou záporných čísel, který je kladný a nerovnost je tedy splněna.

Úloha 6. *Ze tří bezpečnostních modulů A, B a C je postupně vysílán impulz 1, 2, a 3. Moduly A a B i moduly A a C jsou od sebe vzdálené 34 cm. Mezi moduly B a C vede rovný kabel dlouhý 32 cm. Kolmo na tento kabel vede kabel do modulu A. Na průniku těchto dvou kabelů se nachází elektronický zámek. Nejdříve je vysílán impulz 1 z modulu A směrem k zámku. O 10 sekund později je vyslán impulz 2 z modulu B směrem k zámku rychlostí 54 cm/min. Impulz 3 je vyslán z modulu C směrem k elektronickému zámku rychlostí o 10 cm/min větší než impulz 2. Jakou rychlostí se musí pohybovat po celou dobu impulz 1 a o kolik sekund později po impulzu 2 byl vyslán impulz 3, aby byly všechny tři impulzy ve stejnou dobu na elektronickém zámku a zkratovaly ho?*

Pro účely řešení vytvoříme následující matematický model situace: A, B, C jsou vrcholy trojúhelníka a kabely jsou úsečky. Máme tedy rovnoramenný trojúhelník ABC o základně BC a patu výšky na stranu BC označíme V.

Máme tři impulzy. Impuls z A do V urazí svojí dráhu s_A v čase t_A s konstatní rychlostí v_A. Obdobné označení t_B, s_B, v_B (resp. t_C, s_C, v_C) zavedeme i pro impulzy z B do V (resp. z C do V). Čas budeme počítat v minutách, rychlost v centimetrech za minutu a vzdálenost v centimetrech. Známe $s_A = \sqrt{34^2 - (\frac{32}{2})^2} = 30$ (z Pythagorovy věty pro trojúhelník ABV s pravým úhlem u vrcholu V), $s_B = s_C = 16, v_B = 54$ a ze zadání víme $t_B = t_A - \frac{1}{6}$, $v_C = v_B + 10 = 64$.

Z těchto informací můžeme s použitím fyzikálního vzorce $s = vt$ (pro rychlost v, čas t a dráhu s) dopočítat $t_B = \frac{s_B}{v_B} = \frac{16}{54} = \frac{8}{27}$ min. Tedy $t_A = t_B + \frac{1}{6} = \frac{8}{27} + \frac{1}{6} = \frac{25}{54}$ min. Potom tedy $v_A = \frac{s_A}{t_A} = \frac{30}{\frac{25}{54}} = \frac{324}{5}$ cm/min. Zjistili jsme tedy rychlost impulzu 1.

Počítejme dále: $t_C = \frac{s_C}{v_C} = \frac{16}{64} = \frac{1}{4}$. Impulz 3 byl tedy vyslán oproti impulzu 2 později o $t_B - t_C = \frac{8}{27} - \frac{1}{4} = \frac{5}{108}$ min $= \frac{25}{9}$ s.

Úloha 7. *Určete všechny trojúhelníky s celočíselnými stranami, které mají sudý obvod a stranu délky 1.*

Vyberme libovolný trojúhelník, který vyhovuje zadání a označme jeho strany a, b, c, přičemž $c = 1$. Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že a je největší stranou (nebo stejně velkou jako b). Potom podle trojúhelníkové nerovnosti platí: $b + 1 > a$, ale protože a je největší, tak musí navíc platit: $b + 1 > a \geq b$. Jelikož mezi čísly b a $b + 1$ žádné přirozené číslo neleží, tak musí platit, že $a = b$ a tedy je trojúhelník rovnoramenný. Ovšem takovýto trojúhelník má obvod $2a + 1$, což nikdy není sudé, takže zadání žádný trojúhelník nevyhovuje.