Řešení Páté Série

Úloha 1. *Pokud se chce člověk dostat z Komárna do Káhiry, hlavního města Egypta, musí přestoupit v Istanbulu. Z Komárna do Istanbulu létají čtyři letecké společnosti, z Istanbulu do Káhiry další tři. Kolika způsoby se může profesorka Papriková dostat z Komárna do Káhiry a zpět, pokud nechce s žádnou společností letět dvakrát?*

Pro každou ze čtyř možných leteckých společností na cestě do Istanbulu máme na výběr tři společnosti na cestu do Káhiry. Pro každou z těchto 12 možností, jak se dostat do Káhiry máme dvě (jednou ze tří společností jsme letěli cestou tam) možností na cestu zpátky do Istanbulu a následně tři možnosti na cestu do Komárna. Ve výsledku tedy máme $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 3 = 72$ možností na cestu do Káhiry a zpět.

Úloha 2. *Profesor potřeboval deaktivovat všechny stroje, než zničí celou laboratoř. V laboratoři je 100 strojů. Jsou popsány identifikačními čísly od 1 do 100 a žádné dva stroje nejsou stejné. Jaký nejmenší počet strojů může profesor deaktivovat, aby součin identifikačních čísel těchto strojů byl vždy dělitelný šesti?*

Aby číslo bylo dělitelné šesti, musí být zároveň dělitelné dvěma a třemi. Aby součin čísel na vybraných strojích byl dělitelný šesti, musíme vybrat alespoň jeden stroj s číslem dělitelným dvěma a alespoň jeden stroj s číslem dělitelným třemi. Čísel na strojích dělitelných dvěma je polovina, tedy 50. Pokud vyberu 51 strojů, alespoň jeden stroj bude mít číslo dělitelné dvěma. Nemám ale jistotu, že alespoň jedno číslo na stroji bude dělitelné třemi. Čísel na strojích dělitelných třemi je 33. Pokud vyberu 68 strojů, alespoň jedno číslo na stoji bude dělitelné třemi. Teď už jistotu, že mezi 68 stoji bude i stroj s číslem dělitelné dvěma, mám, protože jen 50 jich dělitelných dvěma není. Vybereme tedy 68 strojů.

Úloha 3. *Najděte deaktivační prvočísla p, r, která splňují rovnost:* $p + p^2 + p^3 + r + r^2 + r^3 = 5233$.

Levou stranu rovnosti rozdělíme na dva součty: $(p + p^2 + p^3) + (r + r^2 + r^3)$. Liché číslo (které je na pravé straně rovnosti) dostaneme sečtením sudého a lichého čísla, proto jeden ze součtu na levé straně rovnosti bude sudý a druhý lichý. Podmínku, že součet prvočísla a jeho druhé a třetí mocniny je roven sudému číslu, splňuje pouze prvočíslo 2, v ostatních případech je kterákoliv mocnina prvočísla liché číslo, a tudíž se jedná o součet tří lichých čísel a tudíž výsledek je liché číslo.

Vezměme tedy $p = 2$, potom součet $(p+p^2+p^3) = 14$, a tedy $(r+r^2+r^3) = 5233-14 = 5219$. Z levé strany můžeme vytknout a pravou můžeme rozložit na součin prvočísel, dostáváme: $r(1 + r + r^2) = 17 \cdot 307$. A jelikož $1 + r + r^2 > r$ a jedná se o součiny prvočísel, tak musí platit, že $r = 17$. Naštěstí platí, že $1 + 17 + 17^2 = 18 + 289 = 307$ a úloha tedy má řešení.

Hledanými prvočísly jsou tedy čísla 2 a 17.

Úloha 4. *Sklep si představme jako trojúhelník ABC. Střed strany BC označme X, střed strany AC označme Y a bod Z zvolme tak, že leží na straně AB a $|AZ| : |ZB| = 2 : 1$. Napadené počítače se nachází v oblasti čtyřúhelníku $ABXY$. Určete obsah čtyřúhelníku $ABXY$, víte-li, že kolmice na stranu AB z bodu Zprochází bodem Y, $|AB| = 15$ cm a délka těžnice na stranu AC je 13 cm.*

Úsečka XY je spojnice středů stran, což je střední příčka. Pro tu platí, že má poloviční velikost strany, z jejíhož středu nevede, a je na ni rovnoběžná, takže čtyřúhelník $ABXY$ je lichoběžník, jehož obsah je $S = \frac{(a+c)v}{2}$, kde a a c jsou rovnoběžné strany. Výška na jednu z nich je v, a známe (to je úsečka AB), c je úsečka YX, která má poloviční velikost oproti úsečce AB, tedy 7,5 cm. Velikost v, což je $|ZY|$, můžeme spočítat z Pythagorovy věty, protože úsečka YB je těžnicí na stranu $|AC|$ a trojúhelník ZYB je pravoúhlý s pravým úhlem u vrcholu Z.

$$|ZB|^2 + |YZ|^2 = |YB|^2$$
$$5^2 + v^2 = 13^2$$
$$25 + v^2 = 169$$
$$v^2 = 144$$
$$v = 12$$

A tedy $S = \frac{(15+7,5)\cdot 12}{2} = 22,5 \cdot 6 = 135\ cm^2$.

Úloha 5. *SARA označila v počítači prostor ve tvaru lichoběžník se základnami $|AB| = 4$ cm a $|CD| = 1$ cm. Nechť bod S je průsečíkem jeho uhlopříček. Jaký je poměr součtu obsahů dvojic trojúhelníků ABS, CDS a BCS, DAS?*

Jelikož přímka AB je rovnoběžná s přímkou CD, můžeme nalézt dvě dvojice shodných úhlů $|\sphericalangle ABS| = |\sphericalangle CDS|$ a $|\sphericalangle BAS| = |\sphericalangle DCS|$. Proto jsou trojúhelníky ABS a CDS podobné s koeficientem $k = 4$. Nyní si označme výšky těchto dvou trojúhelníku po řadě v_1 a v_2. Jejich obsahy jsou tedy:

$$\frac{a\cdot v_1}{2} \text{ a } \frac{c\cdot v_2}{2}$$
$$\frac{a\cdot v_1}{2} = \frac{4\cdot c\cdot 4\cdot v_2}{2}.$$

Označme S_1 součet obsahů trojúhelníku ABS a CDS a S_2 součet obsahů trojúhelníků BCS a DAS, tedy:

$$S_1 = \frac{4\cdot c\cdot 4\cdot v_2}{2} + \frac{c\cdot v_2}{2} = \frac{17\cdot c\cdot v_2}{2}.$$

Celkový obsah lichoběžníku:

$$S = \frac{(a+c)\cdot(v_1+v_2)}{2} = \frac{(4\cdot c + c)\cdot(4\cdot v_2 + v_2)}{2} = \frac{25\cdot c\cdot v_2}{2}$$
$$S_2 = S - S_1 = \frac{25\cdot c\cdot v_2}{2} - \frac{17\cdot c\cdot v_2}{2} = \frac{8\cdot c\cdot v_2}{2}.$$

A nyní už můžeme spočítat výsledný poměr:

$$S_1 : S_2 = \frac{17\cdot c\cdot v_2}{2} : \frac{8\cdot c\cdot v_2}{2} = 17 : 8.$$

Úloha 6. *Martin se podíval na displej na vedlejším počítači a zjistil, že musí platit tři rovnosti:*

- $a + b + c = 1$
- $|a| + |b| + |c| = 23$
- $abc = 336$

Najděte trojici celých čísel a, b, c, pro kterou platí tyto rovnosti.

Z prvních dvou rovnic vidíme, že alespoň jedna z neznámých je záporná. Jelikož však abc je kladné, jsou záporné právě dvě. Bez újmy na obecnosti můžeme přepokládat $a > 0, b < 0, c < 0$. Když tedy sečteme první dvě rovnice, dostáváme $24 = a + |a| + b + |b| + c + |c| = a + a + |b| - |b| + |c| - |c| = 2a$ a tedy $a = 12$. Tudíž $bc = \frac{336}{a} = \frac{336}{12} = 28$, $|b| + |c| = 23 - |a| = 23 - 12 = 11$. Jelikož b, c jsou celé a $bc = 28$, tak $(|b|, |c|)$ leží v $\{(1, 28), (2, 14), (4, 7)\}$. Podmínku $|b| + |c| = 11$ splňuje pouze dvojice $(|b|, |c|) = (4, 7)$. Řešením rovnice je tedy trojice $(a, b, c) = (12, -4, -7)$ a její libovolné uspořádání.

Úloha 7. *Určete počet způsobů, jak se šachový král může dostat z levého spodního rohu do pravého horního rohu, pokud se vždy může pohnout pouze doprava nebo nahoru a navíc nesmí chodit přes prostřední čtyři políčka.*

Pokud si zvolíme libovolné políčko, dokážeme vypočítat počet způsobů, jak se dostat do tohoto políčka, pouze ze znalosti počtu způsobů v levém a spodním políčku. Hledané číslo totiž bude součtem těchto dvou čísel. K řešení stačilo vytvořit podobnou tabulku jako je na obrázku a pro krajová políčka doplnit jedničky. Výsledkem tedy je 982 možností.

1	8	36	85	155	267	491	982
1	7	28	49	70	112	224	491
1	6	21	21	21	42	112	267
1	5	15			21	70	155
1	4	10			21	49	85
1	3	6	10	15	21	28	36
1	2	3	4	5	6	7	8
1	1	1	1	1	1	1	1