Řešení Druhé Série

Úloha 1. *Žena v elektru vyslovila částku, kterou za zařízení chtěla. Nejenže byla poměrně vysoká, ale také číslo, které ji vyjadřovalo, bylo součinem tří různých prvočísel, která zároveň (k jeho údivu) byla věkem profesorových tří synovců. Čtyřmístné číslo bylo také palindromem (číslem, které se čte odzadu stejně jako zepředu). Ciferný součet čísla je 2. Jakou částku prodavačka požadovala?*

Ciferný součet čtyřmístného čísla je 2. Hledané číslo tedy může být 2000, ale to není palindrom ani součin 3 prvočísel. Zbývající možností je tedy číslo 1001, což je taky cena detektoru umělé inteligence. Když budeme zkoušet dělitelnost čísla 1001 prvočísly od 2 (pokusíme se jej tedy rozložit na prvočinitele), zjistíme, že číslo je dělitelné 7.

$$1001 : 7 = 143$$

Číslo 143 je zase dělitelné 11:

$$143 : 11 = 13$$

A 13 je zbývající prvočíslo.

$$1001 = 7 \cdot 11 \cdot 13$$

Cena detektoru umělé inteligence je tedy 1001 komářích korun (a profesorovým synovcům je 7, 11 a 13 let).

Úloha 2. *Ondřej pozval profesora a asistentku Kateřinu na oběd. Profesor i Kateřina si dali pizzu. Ondřej se rozhodoval, jestli si má dát zeleninovou tortillu nebo pouze polévku. Nakonec si dal polévku, protože si spočítal, že kdyby si dal o 23 korun dražší tortillu, utratil by za ni i za 2 pizzy všechny peníze, co u sebe měl. Důležité také je, že cena zeleninové tortilly a dvou pizz je v poměru 1:3. Zároveň je také cena dvou pizz čtyřnásobkem ceny Ondřejovy polévky. Kolik korun stojí jednotlivé zmíněné pokrmy, kolik korun stál celý oběd a kolik korun měl Ondřej u sebe?*

Cenu polévky si označíme jako neznámou x. Cena tortilly je potom $x + 23$, cena 2 pizz $4x$ a cena a cena 1 pizzy je $2x$. Ze zadání platí rovnice:

$$\frac{x + 23}{4x} = \frac{1}{3}$$

Z ní vypočítáme, že $x = 69$ (= cena polévky).

cena tortilly: $x + 23 = 69 + 23 = 92$

cena 1 pizzy: $2x = 2 \cdot 69 = 138$

cena celého obědu: $x + 4x = 5x = 345$

obnos, který měl Ondřej u sebe: $345 + 23 = 368$

Polévka stojí 69 korun, tortilla 92 korun, pizza 138 korun a celý oběd 345 korun. Ondřej u sebe tedy měl 368 korun.

Úloha 3. *Město Komárno, kde profesor žije, má šest městských částí (Albatros, Bažantinum, Čápov, Datlice, Emuov a Fantomium). Kamery zůstaly zapnuté jen Datlicích a Fantomiu (k jedné z nich viník neměl oprávnění a druhou nestihl), jinak je viník vypnul všude. Mezi podezřelými je pět pracovníků* *bezpečnostního střediska (Barbora, Klára, Jaromíra, Daniel, Zdeněk a Jirka). Každý z nich se k situaci vyjádřil. Zjistěte, kdo vypnul kamery (je jen jeden viník), jestliže všechny ženy mluví pravdu a právě dva muži lžou. Navíc každému z pracovníků je odepřen přístup k právě jedné městské části (nemohli zde vypnout kamery) a dvěma pracovníkům nemůže být odepřena stejná čtvrť.*

- *Barbora: Jaromíra nemá přístup k Datlicím.*
- *Klára: Barbora i Jaromíra mají přístup k Fantomiu.*
- *Jaromíra: Žádnému z mužů není odepřen přístup k částem, které končí na -ov.*
- *Daniel: Všichni mužští pracovníci jsou nevinní.*
- *Zdeněk: Barbora nemá přístup k Albatrosu.*
- *Jirka: Já nemám přístup k Emuovu a Daniel k Čápovu.*

Díky určitě pravdivému tvrzení Jaromíry je jasné, že Jirka lže (Emuov i Čápov končí na -ov, takže k nim Jirka s Danielem musí mít přístup). Zároveň z Jářina a Barčina tvrzení vyplývá, že ženy mají odepřený přístup ke kamerám v Emuově, Čápově a Datlicích a ke kamerám ve zbylých městských částech určitě přístup mají – Zdeněk tedy také lže (protože ke kamerám v Albatrosu logicky nemá přístup pouze některý z mužů). Když Zdeněk s Jirkou lžou, Daniel musí říkat pravdu, takže muži jsou mimo podezření. Jediným podezřelým (a zároveň viníkem) zůstává Jaromíra, která nemá přístup k Datlicím, a proto zde kamery nevypnula (zbylé ženy jsou také nevinné, protože vždy Bára či Klára mají odepřen přístup k Emuovu nebo Čápovu, takže zde kamery nemohly vypnout).

Úloha 4. *Kolem hlavní budovy vede cesta, která má při pohledu shora tvar pravidelného šestiúhelníku. Strany cesty blíže k budově mají 30 metrů, vzdálenější 40 metrů. Jaký je obsah této cesty? Zaokrouhlujte na dvě desetinná místa.*

Obsah cesty zjistíme tak, že vypočítáme obsahy obou z šestiúhelníků a menší z nich pak odečteme od většího. Při počítání obsahů šestiúhelníků využijeme vlastnosti každého pravidelného šestiúhelníku – tedy toho, že je lze rozdělit na šest shodných rovnostranných trojúhelníků.

Větší šestiúhelník:

Rozdělíme na 6 shodných rovnostranných trojúhelníků. Nejdříve potřebujeme zjistit jejich výšku (Jejím vyznačením trojúhelník rozdělíme na dva shodné pravoúhlé trojúhelníky, ve kterém známe délku dvou stran).

Výšku vypočítáme pomocí Pythagorovy věty:

$$v_a = \sqrt{(40^2 - 20^2)} = \sqrt{1200}m$$

$$S_1 = 6 \cdot \frac{1}{2} \cdot a \cdot v_a = 3 \cdot 40 \cdot \sqrt{1200} = 4156,92m^2$$

Menší šestiúhelník: Šestiúhelník si rozdělíme stejným způsobem a opět vypočítáme výšku trojúhelníků.

$$v_b = \sqrt{(30^2 - 15^2)} = \sqrt{675}m$$

$$S_2 = 6 \cdot \frac{1}{2} \cdot a \cdot v_b = 3 \cdot 30 \cdot \sqrt{675} = 2338,27m^2$$

Nyní již stačí od sebe obsahy šestiúhelníků odečíst:

$$S_1 - S_2 = 4156,92 - 2338,27m^2 = 1818,65m^2$$

Cesta má tedy obsah 1818,65 m^2

Úloha 5. *Najděte všechna nezáporná reálná čísla a, b, c, d, e, pro která platí následující rovnosti:*

- $a + b + c + d + e = 73$
- $a + b + c = 35$
- $c + d + e = 50$
- $b + d = 61$

Sečteme 2. a 3. rovnici v zadání a odečteme 1. rovnici.

$$(a + b + c) + (c + d + e) - (a + b + c + d + e) = 35 + 50 - 73 = c = 12$$

Nyní sečteme druhou a třetí rovnici a odečteme rovnici $2c = 24$ a odečteme 4. rovnici. Získáme rovnici:

$$(a + b + c) + (c + d + e) - 2c - (b + d) = 35 + 50 - 24 - 61 = a + e = 0$$

a tedy $a = 0$, $e = 0$. Nyní již z druhé a třetí rovnice dopočítáme b, d. Z druhé rovnice plyne $b = 35 - c - a = 23$. Z třetí rovnice plyne $d = 50 - c - e = 38$.

Řešením je tedy $a = 0, b = 23, c = 12, d = 38, e = 0$.

Úloha 6. *Dokažte, že číslo $(n^2 - 1)(n^2 - 2n)$ je dělitelné čtyřmi pro každé celé n.*

Stačí si všimnout, že $n^2 - 1 = (n + 1)(n - 1)$ a $n^2 - 2n = n(n - 2)$, tedy celý součin je roven $(n - 2)(n - 1)n(n + 1)$, což je součin čtyř po sobě jdoucích čísel. Jedno z nich tedy musí být dělitelné čtyřmi a stejně tak celý výraz.

Úloha 7. *Pět racionálně uvažujících internetových pirátů (z nichž jeden je v tuhle chvíli profesor) si rozděluje zisk, který činí 100 milionů. Označme je A, B, C, D, E, přičemž platí, že A je mladší než B, ten je mladší než C, ten je mladší než D a E je nejstarší. Piráti rozdělují kořist podle následujícího schématu: Nejstarší pirát (byla to SARA a nyní je to profesor, který se za ni vydává) navrhne rozdělení (v milionech) a poté všichni (včetně něj) hlasují o tom, jestli takovéto rozdělení chtějí nebo ne. Pokud je výsledek nerozhodný nebo je většina pro, tak se poklad rozdělí tak, jak navrhuje nejstarší pirát. Pokud bude většina proti, tak bude nejstarší pirát odpojen z videohovoru a nový nejstarší pirát navrhne nové rozdělení podle stejného schématu. Piráti mají následující preference (čím nižší číslo odrážky tím větší to má pro ně důležitost):*

1. *Chtějí zůstat připojeni.*
2. *Chtějí maximalizovat svůj zisk.*
3. *Pokud by bylo jiné rozdělení, při kterém by dostali stejně peněz a hodili by přes palubu více pirátů, tak si vyberou to.*

Jakým způsobem E rozdělí poklad, aby to pro něj bylo co nejvýhodnější?

Půjdeme na to od konce: Jak by to dopadlo, kdyby zůstali pouze 2 piráti (v 1 je situace více než zřejmá) – A a B? No B by všechny peníze navrhnul sobě a hlasování by bylo nerozhodné, takže by je také dostal. Když budou naživu A, B a C, tak C ví, že A ví, že pokud bude C hozen přes palubu, tak žádné peníze nedostane, takže stačí navrhnout rozdělení, kde C dostane 99 milionů a A dostane 1 a uspěje. Analogicky si odůvodníme, že při 4 pirátech D navrhne rozdělení, kdy on dostane 99 milionů a B 1 milion a při 5 pirátech E navrhne sobě 98 milionů, A navrhne 1 milion a C taky 1 milion.