Řešení První Série

Úloha 1. *Martin našel tři skříně, ve kterých by mohly být SAŘINY procesory. Nikdy je však ještě neotvíral, takže se musel řídit lístečky, které na nich byly nalepené.*

- *Na první skříni je napsáno: „SARA-procesory jsou v této skříni.“*
- *Na druhé skříni je napsáno: „V této skříni nejsou SARA-procesory.“*
- *Na třetí skříni je napsáno: „SARA-procesory jsou v první skříni.“*

*Ve které skříni jsou uloženy SAŘINY procesory, pokud **pouze jeden z nápisů je pravdivý**?*

První a třetí nápis říkají to samé, takže musí buď oba říkat pravdu, nebo lhát, ale oba dva říkat pravdu nemůžou, takže musí oba lhát.

Tedy druhý nápis je pravdivý a procesory jsou ve třetí skříni.

Úloha 2. *Martin si všiml, že jeden z monitorů je stále zapnutý a svítí na něm čtyři čísla. Průměr těchto čísel byl 10 a kdybychom tři z nich sečetli, výsledek by byl roven třiceti sedmi. Jaké je čtvrté číslo?*

Označme si čísla a, b, c, d, přičemž bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že d je hledané číslo a $a + b + c = 37$. Pak víme, že $a + b + c(a + b + c + d)/4 = 10$, tedy $a + b + c + d = 40$.

Po dosazení za a+b+c dostáváme: $37 + d = 40$, tedy $d = 3$.

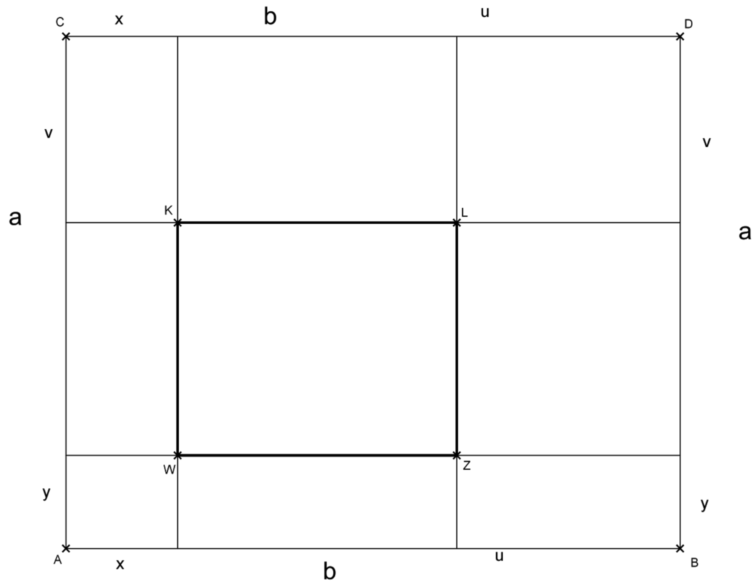
Úloha 3. *Neuronový čip má tvar obdélníku o neznámém obvodu. Aby mohl Martin čip použít, musí tento obvod snížit o 12mm, aniž by změnil poměr stran v obdélníku. O kolik milimetrů musí čip oříznout z každé strany?*

Bohužel se vyskytlo pár drobounkých chyb v zadání, kvůli kterým se úloha stala velice náročnou, trochu nejednoznačnou a navíc nepěknou, za což se tímto omlouváme.

Označme původní obvod jako o_p a nový obvod po seříznutí jako o_n.

Ze zadání víme, že platí $o_p = 12 + o_n$. Udělejme si náčrtek, původní neuronový čip si označme jako obdelník $ABCD$ a jeho strany a a b. Nový je obdelník WZLK Úseky, o které strany ořezáváme, označme jako x, y, u, v.

Důležitá poznámka! V zadání **nebylo** řečeno, že seřezávám z každé strany o stejný počet mm.



Z náčrtku jde vidět, že $o_p = 2(x + y + u + v) + o_n$, po dosazení dostáváme:

$$o_n + 12 = 2(x + y + u + v) + o_n$$
$$12 = 2(x + y + u + v)$$
$$6 = x + y + u + v = (x + u) + (y + v)$$
$$(x + u) = 6 - (y + v)$$

Přičemž uzávorkování na posledním řádku je jen z praktických důvodů – po ořezání zmenšíme b o $(x + u)mm$ a stranu a zmenšíme o $(y + v)$ mm.

Aby platilo, že zůstane poměr stran, tak musí platit:

$$\frac{a}{b} = \frac{a - (y + v)}{b - (x + u)}$$

Vzhledem k tomu, že všechny rozměru obdélníku jsou kladná čísla, tak můžeme zlomek vynásobit jmenovateli. Dostáváme:

$$ab - a(x + u) = ab - b(y + v)$$

To můžeme upravit na:

$$a(x + u) = b(y + v)$$

A nyní můžeme dosadit, že $(x + u) = 6 - (y + v)$:

$$a(6 - (y + v)) = b(y + v)$$
$$6a - a(y + v) = b(y + v)$$
$$6a = a(y + v) + b(y + v)$$
$$6a = (a + b)(y + v)$$
$$y + v = \frac{6a}{a + b}$$

Analogicky zjistíme, že $x + u = \frac{6b}{a+b}$.

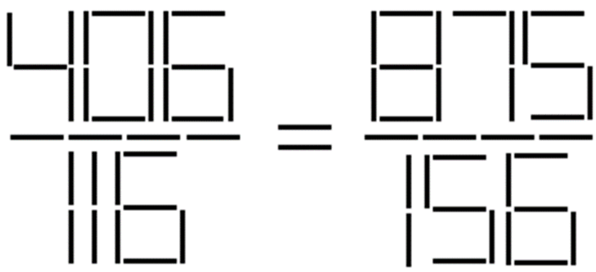
Z každé strany seřezáváme tedy podle náčrtku, přičemž y je libovolné číslo z intervalu $\langle 0; \frac{6a}{a+b} \rangle$ a $v = \frac{6a}{a+b} - y$. A analogicky x je libovolné číslo z intervalu $\langle 0; \frac{6b}{a+b} \rangle$ a $u = \frac{6b}{a+b} - x$.

Úloha 4. *Máme 100 kryptonitových kostiček. 78 z nich hodíme do bílé barvy. Poté 62 ze všech kostiček hodíme do černé barvy (kde se i bílé obarví na černo). 98 kostiček potom vhodíme do speciální zlaté barvy, která obarví jen bíle obarvené kostičky na žluto (černé zůstanou černými a neobarvené neobarvenými). Kolik kostiček bude určitě zlatých?*

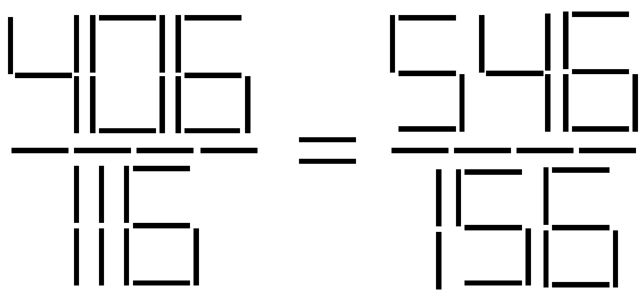
V zadání se objevila drobná chybka, protože zlatá barva obarvovala na žluto. Těm, kdo nám neodpustili a prohlásili, že zlatá nebyla ani jedna jsme udělili polovinu bodů. Plný počet dostal ten, jehož řešení vypadalo nějak takto:

Zajímá nás nejmenší možný počet zlatých kostiček. Aby bylo zlatých co nejméně, tak musí být co nejméně bílých. Toho dosáhneme tak, že všechny kostičky, které budou hozeny do černé barvy, budou bílé. Tedy po hození do černé zůstane $78-62=16$ bílých kostiček a z těchto 16 bílých můžu maximálně 2 nehodit do zlaté barvy, takže zlatých kostiček bude určitě alespoň $16-2=14$.

Úloha 5. *Asistent může přesunout* ***jakékoli tři čárky*** *na displeji na jiné místo. Jak to může udělat tak, aby nově vzniklá rovnost platila?*



Řešení vypadalo následovně:



Úloha 6. *Martin se podíval na displej na vedlejším počítači a zjistil, že musí platit dvě rovnosti:*

- $a^2+ab=1334$
- $b^2+ab=782$

Najděte všechna reálná čísla a, b, pro která platí tyto rovnosti.

Sečteme obě rovnice.
Získáme tak rovnici: $(a^2 + ab) + (b^2 + ab) = 1334 + 782$

$$(a^2 + 2ab + b^2) = 2116$$

$$(a + b)^2 = 2116$$

$$a + b = \pm 46$$

Nyní z první rovnice plyne $a = 1334/(a + b)$.

- Pokud $a + b = 46$, tak $a = 29$ a tedy $b = 46 - a = 17$.
- Pokud $a + b = -46$, tak $a = -29$ a tedy $b = -17$.

Úloha má 2 řešení: $a = 29$, $b = 17$; $a = -29, b = -17$.

Úloha 7. *Asistentovi se zdál podivný sen. Nějaká podivná žena s chapadly místo rukou před něj položila barevná přirozená čísla. Byla to čísla a, b, c a každé z nich mělo jinou barvu. Protože ve snu nelze číst, nevěděl asistent, jakou mají čísla hodnotu. Žena-chobotnice mu ale řekla:*

- *Platí vztah* $3a^2 - 12b^2 = c$
- *Bíle je napsáno prvočíslo menší jak 10*
- *Číslo c je dělitelné sedmi a je větší než 7, ale menší než 70*
- *Dvě z těchto čísel jsou prvočísla*
- *Číslo 11 je napsáno červeně*

Jakou hodnotu má žluté číslo?

Myšlenkový postup mohl vypadat následovně:

- Protože čísla jsou přirozená, musí platit:
$$3a^2 - 12b^2 > 0 \Rightarrow 3a^2 > 12b^2 \Rightarrow a^2 > 4b^2$$
- Protože jsou přirozená, musí také platit: $a > 2b$
- Červeně je číslo 11, číslo c není prvočíslo $\Rightarrow c$ je napsáno žlutě.
- Dále víme, že jedno prvočíslo je 11 a druhé menši než 10 a ani jedno není c (je dělitelné 7), a protože platí $a > 2b \Rightarrow a = 11, b < 10 \Rightarrow b < 6$ (b může být 2, 3 nebo 5)
- $3a^2 - 12b^2 = c$
- $3(a^2 - 4b^2) = c \Rightarrow 3$ děli c
- c může být 21, 42 nebo 63
- Víme, že $a = 11 \Rightarrow 3 \cdot 11^2 - 12b^2 = c$
- $363 - 12b^2 = c$
- $3(121 - 4b^2) = c$

- $121 - 4b^2 = x(b \in \{2,3,5\}, x \in \{7,14,21\}c = 3x)$
- $121 - x = 4b^2 \Rightarrow (121 - x)$ je dělitelné 4

  a) $121 - 7$ není děl. 4

  b) $121 - 14$ není děl. 4

  c) $121 - 21 = 100 \Rightarrow$ lze dělit 4
- $c = 3x \Rightarrow c = 63$

Žluté číslo je tedy 63.