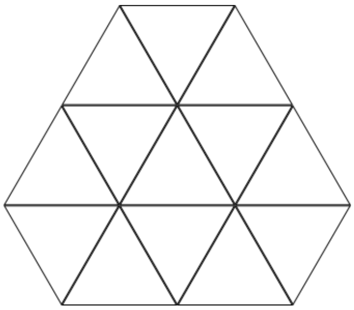
Řešení Páté Série

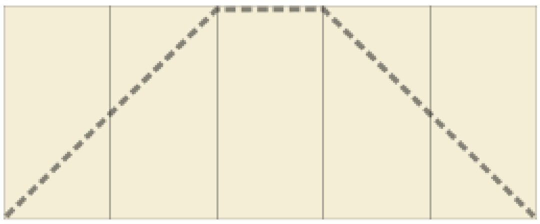
Úloha 1. *Máte za úkol zaplnit následující útvar čísly od 1 do 13. Součet těchto čísel musí být v každé řadě trojúhelníků stejný. Je možné útvar takto zaplnit? Zdůvodněte své tvrzení.*



Podíváme se na řady horizontální řady trojúhelníků. Vidíme, že jsou tři a a každý z trojúhelníků se nachází právě v jedné z těchto řad. Aby tedy existovalo nějaké správné řešení, musí být součet všech čísel dělitelný třemi. Součet čísel od 1 do 13 je ale roven $13 \cdot (13 + 1)/2 = 13 \cdot 7$.

Zde vidíme že rozklad na prvočinitele neobsahuje žádnou trojku, a tak také nemůže existovat žádné řešení.

Úloha 2. *Mapa byla 20 cm vysoká a 120 cm široká. Byla složená z pěti stejně velkých částí, každá část však byla v jiném měřítku. Jak je cesta na mapě dlouhá?*



Nejdříve si vypočítáme výšku (x) a šířku (y) jednoho dílku:

$$y = 20cm$$
$$x = 120/5 = 24cm$$

Nyní určíme délku d i jednotlivých částí na papíře:

Vidíme, že úseky v 1., 2., 4., a 5. části jsou stejně dlouhé, jelikož každý je přeponou pravoúhlého trojúhelníku o délce stran $20/2 = 10$ cm a 24 cm. Délka této přepony je rovna $\sqrt{(10^2 + 24^2)} = \sqrt{676} =$ 26 cm.

$$d_1 = d_2 = d_4 = d_5 = 26cm$$

Délka úseku v 3. části je rovna přímo šířce jednoho úseku, což je 24cm. Tedy $d_3 = 24$ cm.

Nyní již můžeme vypočítat reálnou vzdálenost r_i všech úseků, nejdříve si však tuto rovnici můžeme vypočítat obecně:

$$d_i/r_i = a/b$$
$$d_i = r_i \cdot a/b$$
$$d_i \cdot b/a = r_i$$
$$r_i = d_i \cdot b/a$$

Dosazením do vzorce získáváme:

$$r_1 = 26 \cdot 8/1 = 208cm$$
$$r_2 = 26 \cdot 19/13 = 38cm$$
$$r_3 = 24 \cdot 4/1 = 92cm$$
$$r_4 = 26 \cdot 2/13 = 4cm$$
$$r_5 = 26 \cdot 7/2 = 91cm$$

Proto $r = r_1 + r_2 + r_3 + r_4 + r_5 = 208 + 38 + 92 + 4 + 91 = 433$ cm.

Úloha 3. *SARA může vystřelit, kolik modulů chce. Jeden modul však nemá dost energie na to, aby doletěl až na místo. Moduly si mezi sebou můžou navzájem předávat energii a tím si ji doplnit. Jeden modul má dost energie na to, aby urazil* ***polovinu*** *celkové vzdálenosti, víc energie v sobě ani nést nemůže. Kolik modulů musí SARA vystřelit, aby se alespoň jeden z nich dostal až na místo?*

Nejdříve si rozmyslíme, kdy je nejvýhodnější, aby se modul odpojil. Pokud v jednu chvíli letí n modulů, bude každý z nich spotřebovávat palivo. Chceme tedy, aby se jeden modul odpojil v okamžiku, kdy bude mít v nádrži tolik paliva, aby jím opět doplnil všechny ostatní moduly. Označme si tento čas t_0 . Pokud by se odpojil dříve v čase $t_1 < t_0$, v čase t_1 by uletěná vzdálenost zůstala stejná jako v předchozím případě, ale moduly by měly méně paliva. Pokud by se naopak odpojil později v čase $t_2 > t_0$, měly by moduly v čase t_2 dohromady méně paliva, než pokud by se odpojil v čase t_0, jelikož i n-tý modul spotřebovával palivo.

Označme tedy t_n čas od odpojení $(n + 1)$-ního modulu až po odpojení n-tého. Pak platí: $1 - t_n = t_n \cdot (n - 1)$ což vyjadřuje, že zbytek z nádrže odpojovaného modulu se musí rovnat chybějící části nádrže všech ostatních. Dále upravujeme:

$$1 - t_n = t_n \cdot (n - 1)$$
$$1 - t_n = t_n \cdot n - t_n$$
$$1 = t_n \cdot n$$
$$t_n = 1/n$$

Nyní si do vzorce dosadím pro n=1:

$$t_1 = 1/1 = 1$$

Vidím, že samotný modul poletí jednu časovou jednotku a uletí půl dráhy. Dohromady tedy potřebuji, aby moduly letěly aspoň dvě časové jednotky.

Pokud poletí n modulů, bude celkový čas jejich letu roven součtu časů oddělení jednotlivých modulů tedy: $1/n + 1/(n + 1) + ... + 1/1$ Jednoduchým otestováním možností vidím, že pro 4 moduly bude celkový součet $1/1 + 1/2 + 1/3 + 1/4 = 25/12 > 2 \Rightarrow$ minimální počet modulů je 4.

Úloha 4. *Profesor hledá čísla x, y, z. Ví o nich, že jejich součin je 840. Dále také o jednom z nich ví, že pokud ho zvětší o 10, jejich součin se ztrojnásobí. Pokud od některého čísla odečte 4, nový součin bude roven dvěma třetinám toho původního. Určete všechny takovéto trojice x, y, z.*

Nejdříve provedu rozklad na prvočinitele: $840 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$

Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že první tvrzení platí pro x:

$$\begin{aligned} x \cdot y \cdot z \cdot 3 &= (x + 10) \cdot y \cdot z \\ 3x &= x + 10 \\ 2x &= 10 \\ x &= 5 \end{aligned}$$

Pokud od 5 odečteme 4, bude se součin $x \cdot y \cdot z$ rovnat jedné pěti původního součinu, a proto můžeme bez újmy na obecnosti říct, že druhé tvrzení platí pro y:

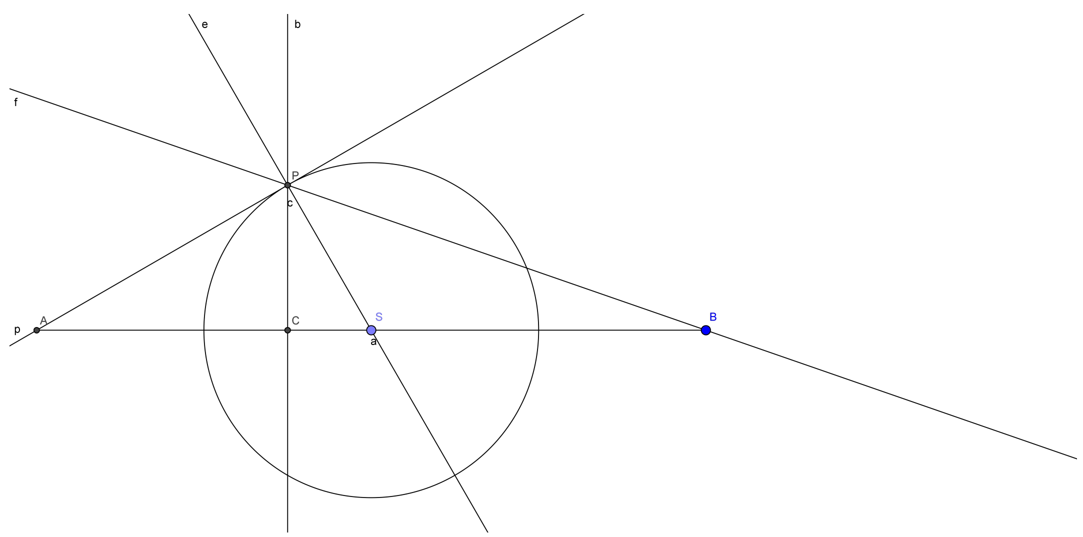
$$\begin{aligned} x \cdot y \cdot z \cdot 2/3 &= x \cdot (y - 4) \cdot z \\ y \cdot 2/3 &= y - 4 \\ y \cdot 2/3 - y &= -4 \\ -y/3 &= -4 \\ y &= 12 \end{aligned}$$

Toto jsou jediné hodnoty, kterých můžou nabývat x a y a tedy $z = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7/5/2/2/3 = 2 \cdot 7 = 14$.
.

Úloha 5. *Je dána úsečka AB o délce 20 cm. Označme S její střed. Kružnice k má střed v bodě S a poloměr 5 cm. Bodem A vedeme přímku p tak, že s úsečkou AB svírá úhel* 30^o*. Přímka p protíná kružnici k v bodě P.*

a) Určete obvod trojúhelníku SPB.

b) Určete obsah trojúhelníku SPB.



Jelikož přímka p protíná kružnici jen v jednom bodě, je její tečnou. Proto je úhel APS pravý.

Podle Pythagorovy věty platí

$$|AP|^2 = |AS|^2 - |SP|^2$$
$$|AP| = \sqrt{|AS|^2 - |SP|^2}$$

Jednoduše můžeme dopočítat obsah trojúhelníku ASP:

$$S_{ASP} = (|SP| \cdot |AP|)/2$$

a jelikož mají trojúhelníky ASP a BSP stejně dlouhé strany a k nim přilehlé výšky, mají taky stejné obsahy. Tak

$$S_{SBP} = S_{ASP} = (|SP| \cdot |AP|)/2 = (|SP| \cdot (\sqrt{|AS|^2 - |SP|^2})/2 = 21,65cm^2$$

Na výpočet obvodu budeme potřebovat znát délku úsečky BP. Pro její výpočet ovšem potřebujeme znát i délky $|PC|$ a $|CS|$. Pro pravoúhlé trojúhelníky platí, že je jejich výška dělí na dva trojúhelníky podobné s původním a proto získáváme vztahy:

$$|SP|/|AS| = |SC|/|SP|$$
$$|SC| = |SP|^2/|AS| = 2,5cm.$$
$$|CP|/|SP| = |AP|/|AS|$$

$$|CP| = |AP| \cdot |SP|/|AS| = \sqrt{|AS|2 - |SP|^2} * |SP|/|AS| = \sqrt{75}/2cm$$

Nyní můžeme dopočítat délku $|BP|$:

$$|BP| = \sqrt{|CP|2 + |CB|2} = \sqrt{75/4 + 156,25} = \sqrt{175} = 13,23cm$$

Obvod trojúhelníku je tedy $O_{SBP} = 15 + 13,23 = 28,23$ cm.

Úloha 6. *SARA promítla před profesora seznam 4 programů. Chyběla v něm však některá data. Každý program byl označený jinou barvou. Dva z programů byly uloženy na počítači, dva z nich na internetu. Víme že:*

- *TOM má IQ 600.*
- *Součet IQ programů uložených* ***na počítači*** *je 1200.*
- *FELIX je uložený na stejném místě, jako modře označený program.*
- *Červeně označený program má IQ 800.*
- *Někdo má IQ 400, ale není to BARA.*
- *Zeleně označený program je uložený na internetu.*
- *SARA je označena žlutou barvou.*

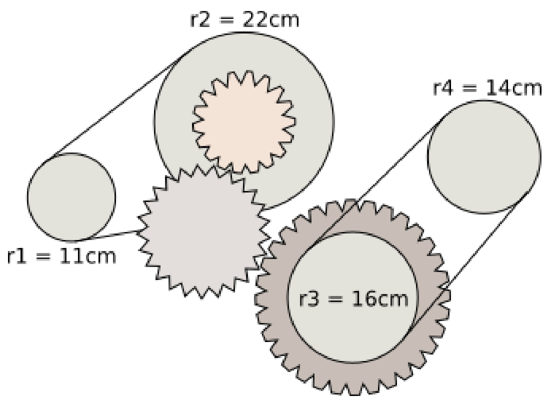
Určete jméno a barevné označení programu, který má IQ 900.

Váš myšlenkový postup mohl vypadat například takto:

1. TOM má IQ 600 ⇒ nikdo jiný nemá IQ 600
2. Součet IQ programů uložených **na počítači** je 1200 ⇒ takový součet platí jen pro 800 a 400 ⇒ TOM je uložen na Internetu
3. Červeně označený program má IQ 800 ⇒ TOM není červeně označený
4. BARA nemá IQ 400, SARA je označena žlutě, FELIX není označen modře.
5. Nyní máme dvě možnosti
   (a) Pokud by BARA měla IQ 900 ⇒ BARA je na internetu ⇒ FELIX a SARA jsou uložení na počítači, ale FELIX je uložený na stejném místě jako modře označený program ⇒ SARA tedy má být označena modře ⇒ SPOR!
   (b) Pokud by BARA měla IQ 800 ⇒ BARA je označena červeně ⇒ BARA je uložena na počítači ⇒ na FELIXE zbylo zelené označení a na TOMA modré⇒ FELIX je uložený na internetu, jelikož zeleně označený program je na uložený internetu ⇒ FELIXOVO IQ je 900 ⇒ IQ SARY je 400 a je uložena na počítači

Správné řešení je TOM (IQ 600, uložený na internetu, modře označený), FELIX (IQ 900, uložený na internetu, zeleně označený), BARA (IQ 800, uložená na počítači, červeně označená) a SARA (IQ 400, uložená na počítači, žlutě označená).

Úloha 7. *Dveře z místnosti se po výpadku elektřiny zasekly. Na obrázku je načrtnuta soustava převodů, které je otevírají.*
a) V jakém poměru jsou frekvence otáčení prvního a posledního kola?
b) Jak velký by musel být poloměr r2, aby byl tento poměr 2:1?



a) Označme si frekvence otáčení kol a, b, c, d, e, f v pořadí, v jakém na sebe navazují. Nejdříve určíme poměry otáčení jednotlivých párů kol. Při porovnávání dvou kol o obvodu o_1 a o_2 platí následující vztah

$$o_1 \cdot f_1 = o_2 \cdot f_2$$
$$f_1/f_2 = o_2/o_1$$

jelikož jsou na sebe kola navázaná, a tedy za daný čas se otočí o stejnou délku obvodu.

Ze zadání ovšem známe pouze poloměry kol r_1 a r_2 ovšem po dosazení zjistíme, že na poměr frekvencí tato skutečnost nemá žádný vliv:

$$f_1/f_2 = o_2/o_1 = 2p_i \cdot r_2/2p_i \cdot r_1 = r_2/r_1$$

Obdobnou úvahou získáme poměr frekvencí ozubených kol s počtem zubů $p1$ a $p2$.

$$f_1/f_2 = p_2/p_1$$

Pro navazující dvojice kol tedy platí:

$$\begin{aligned} a/b &= 22/11 = 2/1 \\ b/c &= 25/18 \\ c/d &= 32/25 \\ d/e &= 14/16 = 7/8 \end{aligned}$$

Poměr frekvencí prvního a posledního kola nyní získáme prostým vynásobením všech poměrů:

$$a/e = a/b \cdot b/c \cdot c/d \cdot d/e = 2/1 \cdot 25/18 \cdot 32/25 \cdot 7/8 = 28/9$$

b) Chceme najít takové číslo q, aby platilo:

$$\begin{aligned} q \cdot a/e &= 2 \\ q &= 2 \cdot (e/a) \\ q &= 2 \cdot (9/28) \\ q &= 9/14 \end{aligned}$$

Aby se výsledný poměr soukolí rovnal $2:1$, musíme poloměr r_2 vynásobit $9/14$:

$$r_2 \cdot 9/14 = 22 \cdot 9/14 = 99/7 = 14,14cm.$$

Druhé kolo musí mít poloměr 14,14cm.