Řešení První Série

Úloha 1. *Na této konspiraci se museli podílet právě dva z jeho pěti asistentů, kteří se teď začali sami obhajovat. Jeden musel přenastavit laser, druhý se nabourat do počítače. Každý, kdo nikoho neobviňuje, mluví pravdu, ale minimálně jedno obvinění je pravdivé. Navíc, pokud Kačka přenastavila laser, byl určitě Martin její komplic, a jestli se Barbora nabourala do počítače, spolupracoval s ní Tom.*

- *Martin říká: Nepřenastavil jsem laser.*
- *Kačka říká: Tom přenastavil laser a Ondra se naboural do počítače.*
- *Barbora říká: Kačka přenastavila laser.*
- *Tom říká: Nenaboural jsem se do počítače.*
- *Ondra říká: Tom přenastavil laser.*

Který asistent přenastavil laser a který se naboural do počítače?

Martin a Tom určitě nelžou, protože nikoho neobviňují. Dále si musíme úlohu rozdělit na 3 případy:

1. Barča nelže, takže Kačka přenastavila laser a z toho lze vyvodit, že Martin se naboural do počítače.
2. Ondra a Kačka nelžou (Barča lže), takže Ondra se naboural do počítače a Tom přenastavil laser.
3. Ondra mluví pravdu a Kačka lže, tedy Tomáš přenastavil laser a kdokoli kromě Ondry se naboural do počítače, tedy dostáváme 3 další dvojice:
   - Tomáš laser, Kačka počítač
   - Tomáš laser, Martin počítač
   - Tomáš laser, Barča počítač

Úloha 2. *Dokažte, že pro 2 libovolná přirozená čísla platí, že jejich součet, rozdíl nebo součin je dělitelný třemi.*

Pokud je jedno z čísel dělitelných třemi, tak pak určitě bude i jejich součin dělitelný třemi. Pokud čísla dávají po vydělení třemi stejný zbytek, pak je lze zapsat jako $3k + x$ a $3l + x$ (x je 0, 1 nebo 2 a k a l jsou libovolná přirozená čísla) a rozdíl těchto 2 čísel je $3(k - l)$ nebo $3(l - k)$.

A pokud dávají různý zbytek, tak to znamená, že jedno z čísel dává zbytek 1 a druhé 2 (případ, kdy by jedno z čísel dávalo zbytek 0 je už vyřešený), tedy je můžu zapsat jako $3k+1$ a $3l+2$ a jejich součet je $3(k + l + 1)$.

Úloha 3. *Číslo n je součin dvou ne nutně různých prvočísel, pokud obě dvě zvětšíme o 1, tak výsledný součin bude o pět větší než n, určete n.*

Ze zadání víme:

$$n = pq \tag{1}$$
$$n + 5 = (p + 1)(q + 1) \tag{2}$$

Dosadíme z (1) do (2), roznásobíme závorky a upravíme:

$$\begin{aligned} pq + 5 &= pq + p + q + 1 \\ 4 &= p + q \end{aligned}$$

Prvočísla menší než 4 jsou pouze 2 a 3 a součet 4 dostanu pouze pokud $p = q = 2 => n = 4$.

Úloha 4. *Mějme trojúhelník ABC, který má obsah $24\,cm^2$. Vyznačme v něm střední příčku KL, kde K je střed strany AB a L střed strany BC. Střední příčkou jsme rozdělili trojúhelník na čtyřúhelník a trojúhelník. Průsečík úhlopříček tohoto čtyřúhelníku označme jako M. Určete obsah trojúhelníka KLM.*

Úhlopříčky ve čtyřúhelníku jsou vlastně těžnice. Díky tomu má trojúhelník ABL obsah $12\,cm^2$ (má stejnou výšku na stranu a a poloviční délku strany a). Jelikož je úsečka KL těžnicí v trojúhelníku ABL, tak má trojúhelník AKL obsah $6\,cm^2$. A protože je bod M těžiště trojúhelníka ABC, tak dělí úsečku AL v poměru 1 : 2, tedy trojúhelník KLM má třetinový obsah trojúhelníka AKL, tedy $2\,cm^2$.

Úloha 5. *Profesor musí vybrat správný soubor ze dvou, u kterých si není jistý, který je který, stejně jako neví, který program mu řekne pravdu a který lež. Pouze programy ví, který soubor je který. Profesor se může zeptat pouze jednoho programu na jednu otázku a poté se musí rozhodnout, který soubor použije. Špatný program odpovídá vždy lživě, správný program zase vždy pravdivě. Jak musí profesor otázku formulovat, aby mohl následně vybrat správný soubor?*

Důležité je ptát se na to, co odpoví ten druhý program (ten, kterého se neptá), jelikož pokud se zeptá toho, co mluví pravdu, tak mu řekne lež, kterou mi řekne ten druhý a naopak lhář mu řekne lež o tom, co by řekl ten, co mluví pravdu. Takže vhodná otázka může vypadat například takto: O kterém souboru by druhý program řekl, že je správný? A tím se dozví, který soubor není ten správný a vybere ten druhý.

Úloha 6. *Krysa za hodinu normálně vykoná 100 obchůzek a při každé z nich musí projít 5 bodů. V základním nastavení chodí z bodu A do bodu B, pak do C, pak do D, pak E a nakonec se vrátí zase do A. Profesor přidal tato kritéria:*

- *Pokud je číslo obchůzky dělitelné 7-mi, tak z bodu A zamíří do C a z něj do B, čímž ujde navíc polovinu obchůzky. Ale protože z B už nemusí znova do C, tak si zase šestinu obchůzky zkrátí.*
- *Pokud je číslo obchůzky dělitelné 17-ti, tak vynechává body B a D, čímž si trasu o čtvrtinu zkrátí.*
- *Pokud číslo obchůzky dává po vydělení 10-ti zbytek 8, tak musí jít normálně bez ohledu na předchozí podmínky.*

Jak dlouho bude takovýchto 100 obchůzek kryse trvat?

100 : 7 = 14 (zbytek 2), tedy 14-krát si obchůzku o polovinu prodlouží a o šestinu zkrátí, ale 28 a 98 dávají po vydělení desíti zbytek 8, tedy zkrácení o polovinu a prodloužení o třetinu proběhne jen 12-krát:

$$12 \cdot \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{6}\right) = 4$$

Takže si tímto cestu prodlouží o 4 celé obchůzky. $100 : 17 = 5$ (zbytek 15) a 68 dává po vydělení deseti zbytek 8, takže zkrácení o čtvrtinu proběhne 4-krát, tímpádem si zkrátí cestu o 1 celou obchůzku ($4 * 1 : 4 = 1$).

Celkem ujde 103 obchůzek, místo 100 obchůzek, tedy 1,03-krát více. A pokud 100 obchůzek vykoná za hodinu, tak 1 obchůzku vykoná za 36 sekund, tak jí celý okruh bude trvat o 108 sekund déle.

Úloha 7. *Asistent-A s Asistentem-B hrají hru. Na kulatý stůl s dírou velikosti jedné mince uprostřed dávají střídavě mince, přičemž Asistent-A začíná. Prohrává ten, kdo nemůže žádnou minci umístit. Určete, kdo má vyhrávající strategii, a popište ji.*

Vyhrávající strategii má B. Jelikož je kruh středově souměrný útvar podle středu, který je představován dírou, tak pokud A umístí kamkoli na stůl minci, tak B ji určitě bude moci položit na bod, který je s tímto bodem středově souměrný podle středu stolu. Tedy pokud A bude moct umístit, tak B určitě bude moct taky.