Zadání Čtvrté Série

Termín Odevzdání: 12. 5. 2014

Celé království je jako na trní, kvapem se totiž blíží jedna z významných a velmi oblíbených událostí roku - Komáří souboje. Během jednoho dne se odvážlivci z celého království utkají v mnoha atletických i všelijakých jiných disciplínách. S touto akcí jsou také spojeny propagační letáčky, transparenty, písně, pokřiky a mnoho dalšího - jen aby každý komár upozornil na své favority.

Úloha 0. *Vymyslete si svého komářího favorita, napište, jak se jmenuje. Dále uveďte pokřik minimálně o třech slovech, kde všechna slova budou začínat na první písmeno jeho jména. A nakonec nakreslete návrh reklamního předmětu, který bude propagovat vašeho favorita.*

Uskutečnění Komářího souboje, ale není žádná jednoduchá věc, jak by se mohlo na první pohled zdát. Nejzákeřnější ze všeho je počasí. Samozřejmě nesmí pršet, ale hlavně musí být přesná teplota vzduchu. Ta se měří unikátním komářím soubojoměrem a její hodnota vychází v kapkách potu. Obsluhovat tento přístroj si ale žádá dobré znalosti matematiky.

Úloha 1. *Soubojoměr na displeji neukazuje přímo hodnotu v kapkách potu, místo toho je zde napsáno: „Dnes je taková teplota, že trojnásobek počtu kapek potu je nejmenším číslem, jehož součet všech číslic je osmnáct.“ Jaká je dnes teplota?*

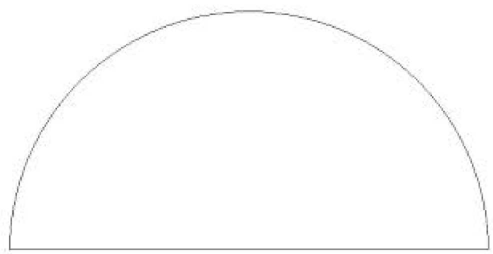
A přesně taková teplota je potřeba ke Komářím soubojům, navíc neprší, takže vrchní hlídač soubojoměru posílá okamžitě tuto očekávanou zprávu na všechny strany. Komáři hned zanechávají své dosavadní práce (i škola se zavírá) a ani ne za půl hodiny je už celý národ na soutěžní louce. Ta má strategickou polohu blízko řeky, kde touto dobou projíždějí mraky vodáků. Před startem se ale musí všichni závodníci zaregistrovat a splnit přijímací logickou úlohu:

Úloha 2. *Slavnému detektivu Bystrososákovi se podařilo vystopovat bandu komářích zločinců, sídlící na pustém ostrově v zapadlém ohybu řeky, kde skrývají svůj lup - tři truhlice. V jedné z nich jsou kousky zlata, v druhé kousky železa a ve třetí obojí (jak zlato, tak železo). Vůdce bandy Bystrososákovi navrhuje, že když je nechá utéct, nabídne mu jednu ze tří truhlic, které mají. Jednotlivé truhlice jsou označeny nápisy: ZLATO; ŽELEZO nebo ZLATO + ŽELEZO. Také ho upozorní, že žádný nápis neodpovídá obsahu truhlice. A aby se mu lépe vybíralo, dá mu ještě možnost si nechat náhodně vytáhnout jeden předmět z truhlice vlastního výběru.*

Ze které truhlice by si měl detektiv Bystrososák nechat vytáhnout daný předmět? A je opravdu možné, aby dokázal rozpoznat truhlici plnou ZLATA?

Po splnění vstupní hádanky už nebrání nic zahájení závodů. Diváci se usadili na tribunách a skandují pokřiky svých favoritů. První disciplína je náročný přelet přes louku, kde je vytvořena velká překážka v podobě horkovzdušného balonu. Všichni až na posledního závodníka Krvososa už mají trasu za sebou a ten musí letět minimálně rychlostí 5 m/s, aby závod vyhrál.

Úloha 3. *Aby se Krvosos pohyboval rychlostí 5 m/s, musí mávnout křídly 10 krát za sekundu. Kolikrát musí komár letící touto rychlostí mávnout křídly, aby překonal horkovzdušný balón o průměru 20 m, který mu brání v cestě? Jeho půlkruhová dráha je na obrázku.*



S vypětím všech sil a svalů to nakonec Krvosos dokázal a v cíli ho už čekali maséři a ošetřovatelé. Námaha ale stála za to, protože jako cenu dostal medaili, velkou kytici a dva balíčky výborných bonbonů z vyhlášené cukrárny U Mlsného sosáčku. Byl tak vyčerpaný a šťastný, že ani nedokázal přijít na to, kolik kytiček a bonbonů dostal. Ty to ale určitě vymyslíš.

Úloha 4. ***a)*** *Najdi dvojciferné číslo určující počet květin v kytici, u kterého je číslice na místě jednotek o 1 větší než číslice na místě desítek a součin tohoto čísla a jeho ciferného součtu je 405.*

b) *Mějme dvě různá přirozená čísla - počty bonbonů v balíčkách, jejich rozdíl druhých mocnin je roven číslu 2007. Která čísla to mohou být?*

A už začínají další a další soutěže. Publikum jásá i brečí, celá událost má perfektní atmosféru. Komáří souboje jsou tvrdá věc, takže dochází i k úrazům. Zvlášť, když se někteří odvážlivci musí utkat i s člověkem. Nechybí ani teamové zápasy a to pak bývají počty závodníků opravdu vysoké. Organizátoři mají velmi těžkou práci a místy se nevyhnou chybám a problémům v administraci, hlavně když si nešikovně zapíší pořadí účastníků.

Úloha 5. *Vezmeme všechna přirozená čísla a poskládáme je za sebou do řady (123456789101112...).*
a) *Která číslice obsadí 1001. místo v řadě?*

b) *Jestliže vezmete těchto 1001 číslic, kolikrát se v nich vyskytne číslo 7?*

Jedna z nejoblíbenějších disciplín se ale odehrává v uzavřených prostorách, které jsou plné různých překážek, vzdušných proudů a vírů. A této soutěže se v kategorii komářích dětí účastní i Bzukobrek. I když byste to možná nečekali, tak šance na vítězství má docela velké. Od své návštěvy v nemocnici se totiž vyhýbá všemu sladkému a pravidelně cvičí.

Úloha 6. *Bzukobrek vstoupil do trojúhelníkové místnosti o stranách* $4n^2 + 1$, $4n$ *a* $4n^2 - 1$, *kde* n *bylo kladné číslo, a ihned začal uvažovat, zdali je místnost pravoúhlá. Uvažoval-li správně, k jakému došel závěru?*

Tato úvaha mu pomohla se v místnosti zorientovat a usnadnila mu splnění úkolu. Na první místo sice nedosáhl, ale stříbrnou medaili si domů odnesl a to je na mladého, dřív tak ufňukaného komára velmi slušný výkon. Nakonec skončila i poslední disciplína a spokojení diváci i soutěžící se začali rozcházet do svých domovů a zařízení určených k bujarým oslavám. Další den byl letošní ročník Komářího souboje v novinách hodnocen jako velmi úspěšný.

Kombinatorika

Díl čtvrtý

A je tu opět nová série a spolu s ní i další díl seriálu o kombinatorice. V tomto dílu si řekneme, co jsou to **kombinace s opakováním**. Ty se od kombinací bez opakování, kterým jsme se věnovali v minulém dílu, liší jen v tom, že se v nich prvky mohou opakovat. Stejně jako u kombinací bez opakování nám ale nezáleží na pořadí vybraných prvků. Zde je jejich přesná definice:

Definice. *k-členná kombinace s opakování z n prvků je neuspořádaná k-tice sestavená z těchto prvků tak, že každý se v ní vyskytuje nejvýše k-krát.*

Jejich použití si hned vyzkoušíme na příkladu.

Příklad. *V obchodě prodávají čokolády, lízátka, bonbóny a lentilky. Kolika způsoby můžeme nakoupit 15 kusů těchto sladkostí?*

Řešení. Vybíráme patnáct sladkostí ze čtyř různých druhů. U vybraných sladkostí nám nezáleží na tom, v jakém jsou pořadí. A každou z nich můžeme vybrat i vícekrát. Můžeme tedy například vybrat sedm čokolád, čtyři lízátka, troje bonbóby a jedny lentilky. Jedná se tedy o kombinace s opakováním. Jak ale spočítáme, kolik takových kombinací existuje?

Uděláme nejprve krok stranou. Každý možný nákup si můžeme představit jako posloupnost koleček a oddělovačů (svislých čar). Každé kolečko bude představovat jednu sladkost a oddělovače budou oddělovat jednotlivé druhy sladkostí. Například nákup, kde je pět čokolád, osm lízátek, žádné bonbóny a dvoje lentilky, takto zapíšeme takto:

$$\circ\circ\circ\circ\circ|\circ\circ\circ\circ\circ\circ\circ\circ||\circ\circ$$

Všimneme si, že každému takovému zápisu odpovídá právě jeden nákup. A protože na zapsání jakéhokoli nákupu potřebujeme právě 15 koleček a 3 oddělovače, můžeme spočítat počet všech možných nákupů jako počet způsobů jak z 18 značek (koleček nebo oddělovačů) vybrat 3, které budou oddělovače (zbylých 15 symbolů pak budou kolečka).

Jednotlivá kolečka jsou od sebe neodlišitelná (např. kolečko na seznamu, které představuje čokoládu, je úplně stejné jako kolečko, které představuje lízátko), stejně tak jsou navzájem nerozlišitelné i oddělovače. Nezáleží nám tedy na pořadí vybraných prvků. Počet nákupů tedy můžeme spočítat jako počet tříčlenných kombinací bez opakování z 18 prvků. Kombinace bez opakování jsme se naučili počítat už v minulém dílu, takže už víme, že je jejich počet roven

$$\frac{18\cdot 17\cdot 16}{3\cdot 2\cdot 1} = 816.$$

Sladkosti tedy můžeme nakoupit 816 způsoby.

Zobecníme tento postup, abychom uměli spočítat počet všech k-prvkových kombinací s opakováním z n prvků. Chceme zjistit, kolika způsoby můžeme vybrat k prvků z n prvkové množiny, přičemž nám nezáleží na pořadí vybraných prvků a každý prvek můžeme vybrat i opakovaně. Opět si každou kombinaci představíme jako posloupnost koleček a oddělovačů. Koleček v ní bude tolik, kolik prvků vybíráme, tedy k. A oddělovačů bude $n-1$, protože právě tolik jich potřebujeme na oddělení n přihrádek na kolečka. Celkem tedy máme $k+n-1$ značek a vybíráme z nich $n-1$, které budou oddělovači.

K úplně stejnému výsledku ale dojdeme, když spočítáme, kolika způsoby lze vybrat k z těchto $n+k-1$ značek, které budou tvořit kolečka. Ostatní značky budou oddělovače.

Počet k-členných kombinací s opakováním z n prvků je tedy stejný jako počet k-prvkových kombinací bez opakování z $n+k-1$ prvků. Opět využijeme znalostí z předchozí série a zjistíme, že počet kombinací s opakováním je

$$\frac{(n+k-1)\cdot(n+k-2)\cdot(n+k-3)\cdot\ldots\cdot(n+1)\cdot n}{k\cdot(k-1)\cdot(k-2)\cdot\ldots 2\cdot 1}.$$

A nyní už nastal čas, abyste si vyzkoušeli použítí kombinací s opakováním na seriálové úloze.

Úloha 7. *Kolika způsoby můžeme rozmístit čtyři stejné kuličky do sedmi krabiček?*

Tato aktivita je realizována v rámci veřejné zakázky *Pilotní ověření systému popularizace technických a přírodovědných oborů vytvářením vazeb vysokých škol na školy nižších stupňů*, která je součástí *IPN Podpora technických a přírodovědných oborů* (PTPO), reg. č. CZ.1.07/4.2.00/06.0005 . Projekt je spolufinancován Evropským sociálním fondem a státním rozpočtem České republiky.

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ