

ZADÁNÍ TŘETÍ SÉRIE

TERMÍN ODEVZDÁNÍ: 5. 3. 2014

Na království dopadla tíha všedních dnů, v nemocnici se uzdravovali poslední pacienti, které po velké oslavě ještě dobolívalo břicho a svět dostal zase na chvíli rád. Přemýšleli jste někdy, jak vypadá všední den takového komára? No v podstatě podobně jako ten náš... Děti chodí do škol a školek, i když mají často trochu odlišné předměty než lidé.

Úloha 0. *Vymysli alespoň pět předmětů, které se vyučují na komáří škole, napiš, co je jejich náplní, jak jsou u žáků oblíbené...*

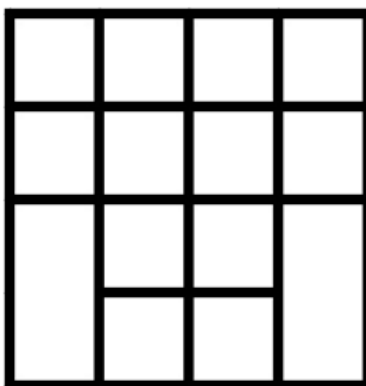
Komáří rodiče zase pracují. Například komorná Krvesanda, maminka našeho kamaráda Bzukobreka, musí dnes nakoupit mnoho dobrot, výtvarných potřeb i všelijakých ozdob, po kterých zatoužilo srdéčko milostpaní Sosandy. Ale po návštěvě prvního krámku obdržela velmi záhadnou účtenku.

Úloha 1. *Na každém řádku účtenky je jedna položka nákupu. Urči hodnotu všech písmenek (číslíce 0-9):*

$$\begin{array}{cccc}
 A & B & C & D \\
 & B & C & D \\
 & & C & D \\
 & & & D \\
 \hline
 2 & 2 & 2 & 2
 \end{array}$$

Bzukobrekova maminka se na ten kousek papíru chvíli dívala nechápavým pohledem, ale pak jí už bylo vše jasné. Schovala účtenku do kabelky a vyrazila směrem k prodejně lahodných bonbonů. Rozhodla se si cestu co nejvíce zkrátit, a tak šla uličkou Krvesajů. Jenže tam vyrušila dva mladé uličníky, kteří zrovna malovali na zeď jakýsi obrazec. Když ji uviděli, rychle vzali všechny své nohy na ramena. Krvesanda se při pohledu na jejich výtvor zarazila. Něco ji na něm zaujalo...

Úloha 2. *Kolik čtverců je na obrázku?*



Konečně naše komorná dorazila do cukrárny U Mlsného sosáčku. Pozdravila se s panem prodavačem, který byl od ucha k uchu zalepený medem a už už chtěla vyslovit svou velkou objednávku na bonbóny z krve jednorozce, když v tom do místnosti vtrhly další tři komáříce. Této vybrané pochoutky byl pro její vzácnost nedostatek, a tak nastal velký boj. Nakonec to prodavač nevydržel a rozhodl se je rozsoudit po svém.

Úloha 3. *Krvesanda dostala půlku bonbonů a jeden pár k tomu. Komáříce, která došla druhá, dostala půlku ze zbylých sladkostí a zase dva bonbony k tomu. Z toho co zbylo, dal prodavač opět půlku a dvě dobroty své třetí zákaznici a nakonec čtvrtá paní dostala půlku ze zbylých bonbonů. Aby byl prodavač spravedlivý, také jí dal dvě sladkosti navíc, ale to už mu nezbylo vůbec nic. Kolik bonbonů cukrář původně měl?*

Komorná zaplatila sladkosti, poděkovala a odešla z cukrárny. Její další kroky vedly do prodejny výtvarných potřeb, kde na stěnách viselo mnoho obrázků a výšivek. Brekobzukovu maminku ale nejvíce zaujala série výtvarů, které byly ve tvaru mnohoúhelníků. Tyto obrázky měly bavlnkami znázorněné všechny své úhlopříčky.

Úloha 4. a) *Kolik úhlopříček má desetiúhelník?*

b) *Kolik úhlopříček má stoúhelník?*

Poznámka: Úhlopříčka je úsečka spojující dva různé nesousední vrcholy mnohoúhelníka.

(Žákům 6. a 7. tříd základních škol a odpovídajících ročníků víceletých gymnázií bude započítán lepší z příkladů a), b); žákům 8. a 9. tříd základních škol a odpovídajících ročníků víceletých gymnázií bude započítán pouze příklad b).)

Po úspěšných nákupech se komorná vrátila na zámek. Když procházela kolem kuchyně, zaslechla, jak vrchní kuchař křičí na kuchtíka. Seznam ingrediencí, který vytvořil pro dnešní večeři, byl totiž nesrozumitelný. Krvesanda to nemohla poslouchat a vkročila do kuchyně, aby pomohla problému vyřešit.

Úloha 5. a) *Najděte přesný počet ingrediencí a, b, c, d, e , pro které platí následující seznam:*

$$a + b + c + d + e = 73$$

$$a + b + c = 35$$

$$c + d + e = 50$$

$$b + d = 61 \text{ (hledejte jen nezáporná reálná čísla)}$$

b) *Najděte zbylý počet ingrediencí f, g , pro které platí následující seznam:*

$$f^2 + fg = 1334$$

$$g^2 + fg = 782 \text{ (všechna reálná čísla)}$$

(Žákům 6. a 7. tříd základních škol a odpovídajících ročníků víceletých gymnázií bude započítán lepší z příkladů a), b); žákům 8. a 9. tříd základních škol a odpovídajících ročníků víceletých gymnázií bude započítán pouze příklad b).)

Poté už spěchala za královnou, aby jí předala, co pořídila. Vladařka byla velmi spokojena. Pokochala se šperky a hned začala vyšívát s novými bavlnkami. Chtěla také ochutnat bonbony, co jí komorná přinesla, a tak je nasypala do speciální kruhové mísy s přepážkou.

Úloha 6. *Tětiva vzdálená 8 cm od středu kruhu je o 13 cm delší než jeho poloměr. Určete poloměr mísy. (Tětiva je úsečka spojující dva body na kružnici.)*

Než skončil den, musela se ještě naše komorná starat o blaho své panovnice. Ale po setmění již spěchala za svým synkem domů. Celé komáří království pomalu upadalo po všedním dnu do všední noci.

KOMBINATORIKA

DÍL TŘETÍ

Je tady nová série a spolu s ní i další díl seriálu o kombinatorice. V tomto dílu si řekneme, co jsou to **kombinace**. Budeme přitom vycházet z toho, co jsme si řekli v minulém dílu o variacích.

Kombinace se od variací liší pouze tím, že nejsou uspořádané. Nezáleží nám tedy na pořadí prvků. To jinými slovy znamená, že např. kombinace $\{1, 2, 3\}$ a $\{2, 3, 1\}$ jsou stejné, zatímco variace $[1, 2, 3]$ a $[2, 3, 1]$ jsou různé. (Kombinace se zapisují ve složených závorkách, protože jsou to neuspořádané množiny, kdežto variace v hranatých závorkách, protože jde o uspořádané množiny.) Začneme opět příkladem.

Příklad. Na tiketu ve Sportce musí sázející zaškrtnout 6 čísel ze 49. Kolika způsoby se dá takový tiket vyplnit?

Řešení. Kdyby záleželo na pořadí zaškrtnutých čísel, tak můžeme každé vyplnění tiketu popsat uspořádanou šesticí, ve které je prvním prvkem první zaškrtnuté číslo, druhým prvkem druhé zaškrtnuté číslo atd. Jednalo by se tedy o šestičlennou variaci bez opakování ze 49 prvků. Jak už víme z minulého dílu, počet takových variací je $49 \cdot 48 \cdot 47 \cdot 46 \cdot 45 \cdot 44$.

Jenže to bychom započítali každé vyplnění několikrát, protože na pořadí čísel nezáleží. Například, pokud bychom zaškrtnuli čísla $[5, 10, 15, 20, 25, 30]$ nebo $[30, 5, 25, 10, 15, 20]$, tak bychom v obou případech tiket vyplnili úplně stejně. Každé vyplnění tiketu jsme takto vlastně započítali přesně tolikrát, kolikrát jdou uspořádat čísla v šesticí čísel, která ho popisuje. Počet možností, jak můžeme čísla v této uspořádané šesticí uspořádat už ale přece umíme spočítat – každé takové uspořádání je totiž šestiprvková variace bez opakování ze šesti prvků. Jejich počet je tedy $6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$.

Nyní již snadno můžeme spočítat hledaný počet způsobů jako podíl těchto dvou čísel. Tiket se tedy dá vyplnit $(49 \cdot 48 \cdot 47 \cdot 46 \cdot 45 \cdot 44) : (6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1) = 13\,983\,816$ způsoby.

Každé možné vyplnění tiketu můžeme popsat neuspořádanou šesticí, které se říká šestičlenná **kombinace bez opakování**. V příkladu jsme tedy vlastně spočítali počet šestičlenných kombinací bez opakování ze 49 prvků. Definice kombinace je velmi podobná definici variace, liší se pouze slovem *neuspořádaná*:

Definice. *k-členná kombinace bez opakování z n prvků je neuspořádaná k-tice sestavená z těchto prvků tak, že každý se v ní vyskytuje nejvýše jednou.*

Chceme-li spočítat počet *k-členných kombinací bez opakování z n prvků*, budeme postupovat stejně jako při počítání počtu možných vyplnění tiketů.

Nejprve si spočítáme, kolika způsoby bychom mohli vybrat *k* prvků z *n* prvků, pokud by nám na pořadí záleželo. To je počet *k-členných variací bez opakování z n prvků*, kterých je, jak už víme, $n \cdot (n - 1) \cdot (n - 2) \cdot \dots \cdot (n - k + 2) \cdot (n - k + 1)$.

Každou kombinaci jsme tím započítali tolikrát, kolikrát můžeme uspořádat prvky v uspořádané k -tici. Počet takových uspořádání můžeme spočítat jako počet k -členných variací z k prvků. Těch je celkem $k \cdot (k - 1) \cdot (k - 2) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1$ (podle vzorce při dosazení $n = k$).

Výsledný počet kombinací je pak podílem těchto dvou čísel. Můžeme jej zapsat ve tvaru zlomku

$$\frac{n \cdot (n - 1) \cdot (n - 2) \cdot \dots \cdot (n - k + 2) \cdot (n - k + 1)}{k \cdot (k - 1) \cdot (k - 2) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1}.$$

Vyzkoušíme si tedy počítání kombinací ještě na několika příkladech:

Příklad. *V knihovně máme 30 knih. Kolika způsoby si můžeme vybrat tři z nich?*

Řešení. Na pořadí knih nám nezáleží. Když si vybereme nějaké tři knihy, které označíme třeba jako A, B, C , je to to samé, jako když vybereme třeba knihy C, A, B . Výsledkem je tedy počet tříčlenných kombinací bez opakování z 30 prvků, kterých je

$$\frac{30 \cdot 29 \cdot 28}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 4\,060.$$

Příklad. *Na setkání se sešlo 15 lidí. Každý si s každým podal ruce. Ke kolika podáním ruky došlo?*

Řešení. Ruce si podala každá dvojice lidí. U těchto dvojic nám nezáleží na pořadí, protože když si podají ruce lidé A a B , je to to samé, jako když si podají ruce lidé B a A . Výsledkem je tedy počet dvoučlenných kombinací bez opakování z 15 prvků. Celkem tedy došlo k $\frac{15 \cdot 14}{2 \cdot 1} = 105$ podáním ruky.

A nyní přišel čas, abyste si i vy vyzkoušeli počítání s kombinacemi na seriálové úloze.

Úloha 7. *Ve třídě je 12 chlapců a 14 děvčat. Kolika způsoby z nich můžeme vybrat šestičlenné družstvo, ve kterém budou 3 chlapci a 3 děvčata?*

Tato aktivita je realizována v rámci veřejné zakázky *Pilotní ověření systému popularizace technických a přírodovědných oborů vytvářením vazeb vysokých škol na školy nižších stupňů*, která je součástí *IPN Podpora technických a přírodovědných oborů (PTPO)*, reg. č. CZ.1.07/4.2.00/06.0005 . Projekt je spolufinancován Evropským sociálním fondem a státním rozpočtem České republiky.

