Zadání Druhé Série

Termín Odevzdání: 6. 1. 2014

Začíná svítat a komáří království se pomalu, ale jistě, probouzí do nového dne. A bohužel to není den jen tak obyčejný, celý komáří svět se totiž vzpamatovává ze včerejší velké oslavy královniných narozenin. Samotná Sosanda si dnes pěkně přispala a má takový bolehlav, že je nepříjemnější než obvykle... Největší problémy však má nemocnice U svatého komára. Od páté hodiny ranní se před ní tvoří snad nekonečná fronta pacientů a většina má stejný problém – přecpané břicho k prasknutí. Sestřičky se ohání jak nejvíce jim nožky a křídla dovolují a podávají skomírajícím komárům zázračný lék.

Úloha 0. *Napiš, z čeho se skládá komáří medicína na přecpané břicho (její složení). Popiš její barvu, vůni, konzistenci... a nakresli, v čem se uchovává.*

A zrovna dnes má první svou službu mladá komářice Křídloléčka. Právě ukončila školu a je velmi nervózní. Její první pacient je malý Bzukobrek, syn zámecké komorné, jenž během včerejší slávy nenápadně uždiboval ze stolu. Teď má břicho třikrát větší než normálně a pláče a pláče. Křídloléčka hned přišla na to, jaký lék mu má předepsat. Ale najednou se zarazila, zapomněla totiž dávkování.

Úloha 1. *Komáří sestřička ví, že má dávkování léku pro dospělého komára zmenšit o 72 a tím dostane 94 % jeho hodnoty, což je dávka pro komáří dítě. Jaké je ale dávkování léku pro dospělého komára?*

Naštěstí je zběhlá v matematice, a přestože Bzukobrek huláká jak na lesy, po krátkém zaváhání problém vyřeší. Pak začne malého nezbedu uklidňovat, slibuje mu hory, doly, černý les za to, že přestane plakat, hraje mu divadlo o tom, jak odvážný komár saje člověčí krev, ale nic nezabírá. Nakonec vzdá všechny své snahy o milé zacházení a rozhodne se pro radikální krok - píchnout mu injekci se sérem pro okamžitý a tvrdý spánek. Tato látka je však umístěna ve skladu speciálních léků, který je střežen záludným kódem.

Úloha 2. *Doplňte do tabulky celá čísla tak, aby součet ve všech čtvercích 2x2 byl stejný.*

1	4		
6		3	
	7		2
		8	5

Konečně malý pacient usnul a Křídloléčka se může věnovat dalším nemocným komárům. Přišla ke skupince velmi potlučených a rozhádaných zámeckých služebných, když se jich ale zeptala, co se přihodilo, každý jí tvrdil něco jiného. Sestřička nad takovýmto chováním vyvalila svá šedá kukadla. Kdo kdy viděl, aby se dospělí komáři chovali hůř než takový Bzukobrek. Musela záhadě přijít na kloub.

Úloha 3. *Komáři A, B, C, D, E, F, G a H vždy mluví buď pravdu, nebo lež. Určete, kdo lže a kdo mluví pravdu.*

- *A: „Jsou zde minimálně 4 komáři, co mluví pravdu.“*
- *B: „Jestliže A a C lžou, pak minimálně jeden z komárů F nebo D mluví pravdu.“*
- *C: „Já i H lžeme.“*
- *D: „G mluví pravdu.“*
- *E: „A a H mluví pravdu.“*
- *F: „D lže.“*
- *G: „Jsem krásný, chytrý a každý mě má rád.“*
- *H: „“E lže a B mluví pravdu.“*

Když se Křídloléčka konečně dozvěděla, co se vlastně stalo, mohla potlučené komáry ošetřit a napsat zprávu o tomto případu. Následně ji šla odevzdat do kanceláře pana ředitele. Tam se ale srazila ve dveřích s panem vrátným. Ten byl špatný z toho, že v chaosu, který dnes panoval v nemocnici, nestihl spočítat, kolik lůžek bude tuto noc obsazeno nemocnými a přecpanými komáry. Křídloléčce ho bylo líto, a tak se nabídla, že mu tu záhadu pomůže vyřešit.

Úloha 4. *Na příjmu v nemocnici přijali g komárů ze služebnictva a komárů z královské rodiny o h méně než komárů ze služebnictva. Kolik komárů celkem zůstalo přes noc v nemocnici, jestliže 3 komáry z královské rodiny a 1 ze služebnictva nakonec odpoledne poslali domů?*

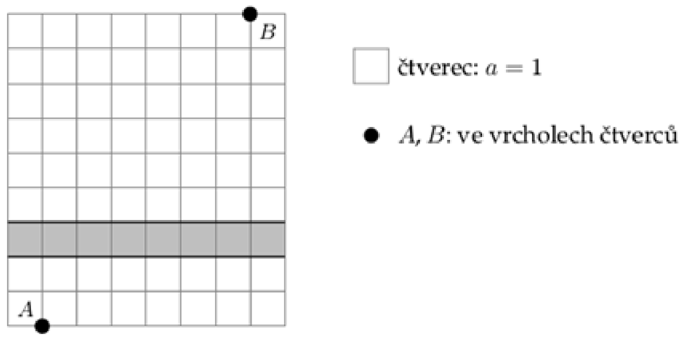
a) *Počítejte s čísly* $g = 30$, $h = 10$

b) *Uveďte obecný výsledek*

(Žákům 6. a 7. tříd základních škol a odpovídajících ročníků víceletých gymnázií bude započítán lepší z příkladů a), b); žákům 8. a 9. tříd základních škol a odpovídajících ročníků víceletých gymnázií bude započítán pouze příklad b).)

Stačilo pár minut a odpověď na tento problém byla na světě. Když ji naše sestřička oznámila panu vrátnému, byl tak šťastný, že jí dal velkou pusu. To uvedlo Křídloléčku do velkých rozpaků, jelikož už byla zadaná. Její přítel byl velký fešák a živil se jako hlídač ve vězeňské nemocnici. I tady řešili dnes pracovníci mnoho problémů, protože včerejší den byl rájem pro výtržníky (tak už to u velkých slavností bývá) a noční můrou pro strážce zákona. Tento komár Krvobouch zrovna dumal nad jednou otázkou.

Úloha 5. ***a)*** *Hlídač vyráží z bodu A do bodu B. Jaká je nejkratší cesta kterou musí ujít, pokud se v šedě zbarvené zóně musí pohybovat kolmo na přímky, mezi nimiž se tato zóna nachází? Proč je tato trasa nejkratší? Jak daleko od bodu A je bod, na kterém hlídač začne přecházet šedou zónu? Mimo šedou zónu se může hlídač pohybovat libovolně, ne jen po vyznačených stranách.*



b) *Každou celou minutu vyrazí z počátku hlídkové trasy jeden hlídač, o sedm minut později dojde na konec území a po stejné trase se vrací zpět. Kolikrát se náš hlídač během své cesty tam a zase zpět potká s jiným hlídačem v protisměru, víte-li, že první hlídač vycházel v 7:20, náš hlídač vycházel v 7:30 a nepočítáme-li, že se potkal s hlídačem v době svého odchodu z počátku hlídkové trasy ani příchodu na toto místo zpět.*

(Žákům 6. a 7. tříd základních škol a odpovídajících ročníků víceletých gymnázií bude započítán lepší z příkladů a), b); žákům 8. a 9. tříd základních škol a odpovídajících ročníků víceletých gymnázií bude započítán pouze příklad b).)

Vraťme se ale k naší mladé sestřičce. Zrovna ošetřuje komářího dědečka, který má velkou zálibu v matematice (ostatně jako celé komáří království) a nejraději ze všeho má geometrii. Jelikož je ho Křídloléčce líto, tak se ho snaží povzbudit a zadá mu pro zábavu zrovna tento příklad.

Úloha 6. *Uvnitř obdélníku $ABCD$ je bod M. Dokažte, že platí*

$$|MA|^2 + |MC|^2 = |MB|^2 + |MD|^2.$$

Dědeček je spokojený, že si má s čím lámat hlavu, nemocnice se pomalu vyprazdňuje a zůstávají jen ti komáři, kteří zde budou spát. Křídloléčka má za sebou první a velmi náročný pracovní den. A stejně jako vy, vše bravurně zvládla. Dorazila domů a nechala si zdát o panu vrátném…

Kombinatorika

Díl druhý

Vítejte u druhého dílu seriálu o kombinatorice. V tomto dílu si povíme, co jsou to variace. K tomu se nám bude hodit pravidlo součtu a pravidlo součinu, které jsme se naučili používat v minulém dílu. Začneme nejprve příkladem.

Příklad. *Máme košík ovoce, ve kterém je pomeranč, banán, jablko a hruška. Kolika způsoby si z něj můžeme vybrat jedno ovoce k snídani, jedno ke svačině a jedno k obědu?*

Řešení. Na snídani máme na výběr ze čtyř možností. Na svačinu už si vybíráme pouze ze tří, protože jeden kus ovoce jsme už snědli. A nakonec si vybereme ovoce k obědu, kde nám zbývají už jenom dvě možnosti.

Každou volbu můžeme popsat uspořádanou trojicí. První prvek této trojice bude ovoce ke snídani, druhý prvek ovoce ke svačině a třetí prvek ovoce k obědu. První prvek můžeme vybrat čtyřmi způsoby, druhý po výběru prvního třemi způsoby a třetí po výběru prvních dvou dvěma způsoby. Pomocí pravidla součinu snadno určíme, že ovoce si můžeme vybrat $4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$ způsoby.

Každé z těchto uspořádaných trojic, která nám říká, jakým způsobem jsme si ovoce vybrali, se říká tříčlenná **variace bez opakování**. V našem příkladu jsme vlastně počítali počet tříčlenných variací ze čtyř prvků. Pojďme si nyní variace přesně definovat a zobecnit vzorec pro počet variací.

Definice. k-členná variace bez opakování z n prvků je uspořádaná k-tice sestavená z těchto prvků tak, že každý se v ní vyskytuje nejvýše jednou.

Pokud chceme spočítat počet k-členných variací bez opakování z n prvků, tak budeme postupovat stejným způsobem, jako při vybírání ovoce. Každá variace je uspořádaná k-tice, jejíž první prvek můžeme vybrat n způsoby, druhý po výběru prvního už jen $n-1$ způsoby, třetí po výběru prvních dvou $n-2$ způsoby… až k-tý po výběru všech předchozích prvků $n-k+1$ způsoby. Z pravidla součinu pak vyplývá, že počet k-členných variací bez opakování z n prvků je $n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-k+2) \cdot (n-k+1)$.

Těmto variacím se říká variace bez opakování, protože se v nich prvky nemohou opakovat. Někdy se ale může stát, že se prvky opakovat mohou, jako třeba v následujícím příkladu.

Příklad. *Kolik různých PIN kódů může mít kreditní karta, pokud je PIN kód složený ze čtyř číslic v rozsahu 0 až 9?*

Řešení. Každý PIN kód můžeme popsat uspořádanou čtveřicí, jejímiž prvky budou jednotlivé číslice. První číslici vybíráme z deseti možností. Druhou po výběru první také z deseti možností, stejně tak třetí i čtvrtou po výběru všech předchozích číslic. Z pravidla součinu vyplývá, že kreditní karta může mít $10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 10^4 = 10\ 000$ různých PIN kódů.

Takovýmto variacím, kde se prvky mohou opakovat, se říká **variace s opakováním** a jsou definované takto:

Definice. k-členná variace s opakováním z n prvků je uspořádaná k-tice sestavená z těchto prvků tak, že každý je v ní nejvýše k-krát.

Počet k-členných variací s opakováním z n prvků budeme opět počítat pomocí pravidla součinu. První prvek variace vybíráme z n možností, druhý po výběru prvního také z n možností… až k-tý po výběru všech předchozích také z n možností. Počet těchto variací je tedy $n \cdot n \cdot \ldots \cdot n$ (součin k činitelů) neboli n^k.

Příklad. *Kolik existuje různých čísel od 1 do 1 000, které se skládají pouze z číslic 2, 4, 6 a 8?*

Řešení. Čísla si můžeme podle pravidla součtu rozdělit do skupin podle počtu číslic, a pro každou tuto skupinu určit zvlášť její počet. Jednociferná čísla jsou zřejmě čtyři, čtyřciferné není žádné. Pro dvojciferná (resp. trojciferná) čísla vlastně počítáme počet dvojčlenných (resp. trojčlenných) variací s opakováním ze čtyř prvků, kterých je 4^2 (resp. 4^3). Celkem tedy existuje $4 + 4^2 + 4^3 = 4 + 16 + 64 = 84$ takových čísel.

Nyní si můžete zkusit použít variace sami na seriálové úloze.

Úloha 7. Kolika způsoby můžeme sestavit vlajku tvořenou ze tří různobarevných vodorovných pruhů, pokud máme na výběr z červené, modré, žluté, bílé a černé látky? Kolik z těchto vlajek obsahuje červený pruh?

Tato aktivita je realizována v rámci veřejné zakázky *Pilotní ověření systému popularizace technických a přírodovědných oborů vytvářením vazeb vysokých škol na školy nižších stupňů*, která je součástí *IPN Podpora technických a přírodovědných oborů* (PTPO), reg. č. CZ.1.07/4.2.00/06.0005 . Projekt je spolufinancován Evropským sociálním fondem a státním rozpočtem České republiky.

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ