

ZADÁNÍ PRVNÍ SÉRIE

TERMÍN ODEVZDÁNÍ: 30. 10. 2013

Za devatero horami, sedmero loukami a možná i o stovky kilometrů dál bylo, je a pravděpodobně i ještě dlouho bude jedno komáří království. A že to je království vskutku obrovské a bohaté, to lze jednoduše prokázat. Odevšad se totiž neustále ozývá samé: „Au!“, „Krucí písek!“, „Pozor! Tady je další velké hejno!“ či „Vzdej to! Ohánění pádlem ti stejně nepomůže!“ a mnoho dalších bolestných i našťvaných výkřiků.

Úloha 0. *Vymyslete vtipnou báseň o komářím štípnutí, která bude mít alespoň 6 veršů.*

Jistě jste již poznali, jedná o království na řece, v řece, nad řekou i kolem ní. Tvrdou absolutistickou rukou zde vládne královna Sosanda a má tolik dětí, že to snad ani nejde spočítat. A zrovna dnes slaví tato vladařka své narozeniny. Přípravy na velkou oslavu jsou již v plném proudu, když tu se stane příšerná věc!

Úloha 1. *Komáří dodávka s čerstvou lidskou krví jezdí každý den trasu dlouhou 60 kilometrů průměrnou rychlostí 50 kilometrů za hodinu. Dnes se ale dodávka porouchala a než ji spravili a mohla se zase vydat na svou trasu, uběhlo přesně 12 minut. O kolik kilometrů v hodině bude muset dodávka zvýšit svou průměrnou rychlost, aby do zámku přijela v obvyklý čas, tedy jako každý jiný den?*

Ještěže jste stejně jako řidič dodávky komár Krvosos dokázali přijít této záhadě na kloub. Jinak by mu hrozil děsivý trest. Když tedy dorazil do zámku, vše již bylo v plném proudu. Nejlepší malíři z celého světa přijeli, aby splnili následující nelehký úkol.

Úloha 2. *Kolik obdélníků s obsahem 4823 cm^2 má délky stran vyjádřeny v centimetrech přirozenými čísly?*

Přesně tolik obrazů s podobiznou královny totiž museli vytvořit. Činilo se i všechno služebnictvo. Pracovalo, jen se za nimi vítr z křídel vířil. Jelikož byl každý komár zvědavý a nenechal si to v žádném případě ujít, celý zámek praskal návštěvníky ve všech. Byl tu však takový frmol, že se návštěvníci zapomněli počítat... a to se tak nesmí nechat!

Úloha 3. *Za poslední 3 dny navštívilo zámek celkem 1435 komárů. Ve druhém dni přišlo o 70 komárů více než v den první a třetí den bylo na zámku 1,5krát více komárů než v den druhý. Vypočítejte, kolik komárů navštívilo zámek v jednotlivých dnech.*

Když byl konečně i tento problém vyřešen, zbývalo ještě na výběrčím daní získat od všech občanů zámku i podzámčí peníze na velký dar pro královnu, jenže ani on to neměl svou úlohu jednoduchou – bylo zde příliš mnoho komárů na příliš malé truhlice na peníze.

Úloha 4. V království používají mince v hodnotách 5 Sosů a 9 Sosů.

a) Kolika nejméně mincemi lze zaplatit příspěvek na Sosandin dar, aby celková hodnota byla přesně 70 Sosů?

b) Jaká největší částka se nedá pomocí těchto mincí zaplatit?

(Žákům 6. a 7. tříd základních škol a odpovídajících ročníků víceletých gymnázií bude započítán lepší z příkladů a), b); žákům 8. a 9. tříd základních škol a odpovídajících ročníků víceletých gymnázií bude započítán pouze příklad b).)

Konečně se už vše chýlilo k velkému zahájení oslavy. Uklízečky smejčily sál a všechny komnaty (což rozhodně nebylo nic snadného, málokdo totiž vůbec dokázal spočítat, kolik jich na zámku je). Královnou obléávalo snad sto komorných, aby ji pořádně načančaly. Ale ani špendlíčkem ji přitom nesměly píchnout, stihl by je strašlivý trest. Číšníci už chtěli nosit jídlo na stůl, když vtom si všimli, že je na něm hromada haraburdí, které se musí nejdřív odklidit.

Úloha 5. Na stole jsou tři celá čísla.

a) 1, 15, 1000

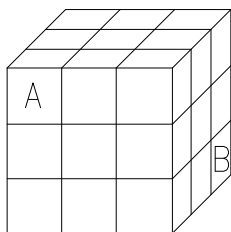
b) 1, 11, 1000

V každém kroku můžeme vzít dvě z nich x, y , kde $x \leq y$, a vyměnit je za $x+x, y-x$. Najděte způsob, jak pomocí těchto kroků změnit některé z čísel na nulu.

(Žákům 6. a 7. tříd základních škol a odpovídajících ročníků víceletých gymnázií bude započítán lepší z příkladů a), b); žákům 8. a 9. tříd základních škol a odpovídajících ročníků víceletých gymnázií bude započítán pouze příklad b).)

A už měli v rukách mnoho pochutin i nápojů (radši je zde nebudu konkretizovat, každý si to asi dokáže představit), které začínali chystat na odklizený stůl. Do sálu se začali pouštět hosté a to i ti, kterým se podařilo nenápadně vmísit do davu – takovou událost si prostě nikdo nechtěl nechat ujít. Pak zahráli fanfáru a do místnosti majestátně vkráčela sama komáří královna Sosanda. Posadila se na svůj trůn z pozlacených komářích křídel, a jelikož měla ráda, když se komáři kolem ní potili hrůzou z její velké moci, hned jim zadala složitý úkol.

Úloha 6. Máme krychli složenou z $3 \times 3 \times 3$ malých krychliček. Na krychličce A sedí komár, zatímco na krychličce B sedí člověk. Může komár chytit a štípnout někdy člověka, když mohou z krychličky přelézt jen na krychličku, která s ní sousedí stěnou? Víme také, že vždy se jako první pohybuje komár a poté až člověk (člověk nemůže dobrovolně vlézt na krychličku, kde už je komár).



Zaplat' komár, že občané království už svou vladařku dávno dobře znali a tak si doma po nocích tajně a velmi poctivě trénovali logické myšlení a matematiku. Všichni její úkol zvládli bravurně splnit. Oslava dál probíhala již poklidněji – jedlo se, pilo, tancovalo... Královna dnes nikoho za nic nepotrestala a díky tomu se všichni nad ránem vrátili velmi unavení do svých postýlek (tedy až na ty, co stihla během dne tvrdá ruka vodákova).

KOMBINATORIKA

DÍL PRVNÍ

V tomto školní roce bude opět vycházet seriál a spolu s ním i seriálová úloha. Ten letošní se bude zabývat kombinatorikou. Kombinatorika je část matematiky, která řeší, jak spočítat počet nějakých objektů. Takovou úlohou může být například i spočítat, kolik máme kusů ovoce, když máme 5 pomerančů, 3 mrkve, 6 banánů a 10 rajčat. Často se ale setkáme i s těžšími úlohami. S jejich řešením nám pak pomohou dvě pravidla – pravidlo součtu a pravidlo součinu.

Pravidlo součtu říká, že když všechny objekty, jejichž počet chceme spočítat, umíme rozdělit do několika skupin, tak aby každý objekt byl v právě jedné skupině, pak celkový počet těchto objektů je roven součtu počtů objektů ve všech skupinách.

Toto pravidlo jistě každý z vás umí přirozeně používat, jenom jste možná zatím nevěděli, že se mu říká pravidlo součtu. Například se pomocí něj dá vyřešit úloha nahoře. Ovoce můžeme rozdělit na skupinu, ve které je 5 pomerančů, a na skupinu, ve které je 6 banánů. Potom snadno spočítáme celkový počet kusů ovoce jako součet počtů kusů v jednotlivých skupinách, tedy $5 + 6 = 11$.

Druhé pravidlo se nazývá pravidlo součinu. Abychom si mohli zavést pravidlo součinu, budeme potřebovat vědět, co je to množina a uspořádaná množina.

Množina je soubor nějakých objektů, u kterého nám nezáleží na jejich pořadí. Těmto objektům se říká prvky této množiny. Zapisuje se pomocí složených závorek, ve kterých jsou jednotlivé prvky oddělené pomocí čárek nebo středníků. Příkladem množiny je třeba tříprvková množina $\{10, 20, 30\}$. Ta je stejná jako množina $\{20, 10, 30\}$ a různá například od množiny $\{10, 20\}$. Prvky množiny nemusí být pouze čísla, ale třeba i barvy (např. {červená, modrá, zelená}), lidi (např. množina dětí, které chodí do 7.A) nebo věci. Dvouprvkové množině můžeme také říkat dvojice, tříprvkové množině trojice. . . a obecně k -prvkové množině k -tice.

Uspořádaná množina je pak soubor objektů, u kterého nám na pořadí prvků záleží. Abychom ji v zápisu odlišili od neuspořádané množiny, zapisuje se do hranatých závorek. Takže třeba [červená, modrá, zelená] a [červená, zelená, modrá] jsou dvě různé uspořádané množiny.

Nyní si můžeme zavést **pravidlo součinu**: Počet všech uspořádaných k -tic, jejichž první člen lze vybrat n_1 způsoby, druhý člen po výběru prvního členu n_2 způsoby. . . až k -tý člen po výběru všech předcházejících členů n_k způsoby, je roven $n_1 \cdot n_2 \cdot \dots \cdot n_k$.

Tato suchá definice půjde lépe pochopit, když si ukážeme pravidlo součinu v praxi:

Příklad. Kolik karet obsahuje běžný balíček? Běžný balíček obsahuje srdcové, kárové, pikové a křížové karty v hodnotách 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, kluk, dáma, král a eso.

Řešení. Každou kartu můžeme vyjádřit uspořádanou dvojicí, ve které je prvním prvkem barva a druhým prvkem hodnota karty (např. [piková, dáma]). První prvek každé karty lze tedy vybrat čtyřmi způsoby. Ať vybereme první prvek jakkoliv, můžeme vybrat druhý prvek třinácti způsoby. V běžném balíčku je tedy $4 \cdot 13 = 52$ karet.

Příklad. *Kolika způsoby mohou padnout čtyři šestistěnné hrací kostky?*

Řešení. Každý hod můžeme popsat uspořádanou čtveřicí, jejímiž prvky budou čísla, která padla na jednotlivých kostkách. Například, když na první kostce padne 1, na druhé 5, na třetí 4 a na čtvrté 6, zapíšeme tento hod jako $[1, 5, 4, 6]$. Je důležité si uvědomit, že pokud by například třetí a čtvrtá kostka padly obráceně, jsou to dva různé hody, tedy $[1, 5, 4, 6]$ a $[1, 5, 6, 4]$. První prvek můžeme vybrat šesti způsoby, druhý po výběru prvního také šesti způsoby, stejně tak třetí i čtvrtý po výběru všech předchozích šesti způsoby. Kostky tedy mohou padnout celkem $6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 = 1296$ způsoby.

Úloha 7. V pytlíku jsou tři červené, tři modré a tři zelené kuličky. Kolika způsoby z nich můžeme vytáhnout čtyři kuličky, pokud záleží na pořadí, ve kterém je vytahujeme?

Tato aktivita je realizována v rámci veřejné zakázky *Pilotní ověření systému popularizace technických a přírodovědných oborů vytvářením vazeb vysokých škol na školy nižších stupňů*, která je součástí *IPN Podpora technických a přírodovědných oborů (PTPO)*, reg. č. CZ.1.07/4.2.00/06.0005 . Projekt je spolufinancován Evropským sociálním fondem a státním rozpočtem České republiky.

