Zadání páté série

Termín odevzdání: 20. dubna

Na Ptačím Ostrově byl krásný den. Sluníčko svítilo, ptáčci zpívali, zkrátka panovala mírumilovná atmosféra. To samé nelze říct o místě kousek od břehu. Na jezeře proti sobě bojovaly dvě lodě. Bylo slyšet křik obou posádek, duněly výstřely z kanónů a obrovské vlny odnášely bojovníky z paluby.

„Pták přes palubu!“ zakřičel Boháč už asi podesáté. Jeho loď byla určena hlavně na zastrašení pirátů, aby se vzdali bez boje. Když teď k boji došlo, objevilo se několik problémů. Druhá loď byla velmi malá, mnohem menší, než pirátské lodě obvykle bývají, takže všechny dělové koule letěly vysoko nad ní. Když se na ni jeho posádka pokusila vylodit, byli postupně všichni smeteni vlnami. Přitom nepřátelská loď měla všehovšudy čtyři piráty na palubě, kteří ovšem výstřely z osamoceného děla na přídi dělali velkou škodu na Boháčově fregatě. Naštěstí pro Boháče jim brzy došlo střelivo, takže boj pokračoval dál bez jakéhokoliv úspěchu na té či oné straně. V zápalu bitevní vřavy si nikdo nevšiml, jak kolem proplula cizí loď.

Úloha 0. *Kdo se plavil na cizí lodi?*

Opusťme teď ale tuto děsivou bitvu a vraťme se zpět do školy, kde žáci 2. A mají hodinu finanční gramotnosti s panem učitelem Chuďasem. Většinu žáků tato hodina vůbec nebavila, jelikož její náplň sestávala z nudného výkladu, který byl navíc velmi subjektivně zabarvený a obsahoval faktické chyby.

„Teďka si ukážeme jednoduchý příklad, jak vydělat peníze,“ řekl pan učitel, ukázav následující příklad.

Úloha 1. *Havran obchoduje s klobouky a deštníky. V Kloboukovicích (K) se dá klobouk koupit za 2 peníze a deštník prodat za 8 peněz. V Deštníkově (D) se dá klobouk prodat za 3 peníze a deštník koupit za 6 peněz. Havran cestuje mezi městy v tomto pořadí*

$$K \to D \to K \to D \to K \to D \to K$$

a při každé návštěvě města vždy prodá všechno zboží, které má, a nakoupí tolik zboží, na kolik mu stačí peníze. Kolik musí mít na začátku peněz, aby na konci měl aspoň 36 peněz?

„To je ale pouhá matematika!“ protestoval Rerer.

„Navíc s Kenárem počítáme mnohem zábavnější příklady!“ dodal Ferer.

„Netahejte mi Kenára do mojí hodiny!“ naštval se Chuďas. „Cílem není spočítat příklady, ale zamyslet se nad světem. Jaký má podle vás důsledek takovéto snadné vydělávání peněz?“

„Bude ze mě boháč!“ zakřičel Podloudňák.

„To možná ano, ale zkuste popřemýšlet, jaké to bude mít důsledky pro ekonomiku. Zákon o zachování peněz nám říká, že pokud získáte peníze, někdo jiný nutně musel stejné množství ztratit.“

„Takže si myslíte, že poctivým vyděláváním peněz okrádáme ostatní?“ pronesl vlezlou otázku Jan.

„Já vám nebudu říkat svůj názor,“ odvětil pan učitel, „ale rozhodně existují ptáci, kteří přichází o majetek kvůli zbohatlíkům.“

„Kdo je podle vás zbohatlík?“ ozval se papoušek.

„Třeba ten, kdo správně uhodne tři po sobě jdoucí čísla v loterii.“

Úloha 2. *Mám tři po sobě jdoucí přirozená čísla, první z nich se zapíše v šestnáctkové soustavě pouze jednou číslicí. Třetí z nich je prvočíslem. Součet všech těchto tří čísel je dělitelný osmi. Jaká po sobě jdoucí čísla mám?*

Zatímco se ptáčci nadále hádali s Chuďasem, Čimčarárum se svojí posádkou čelili útoku Boháče.

„Spusťte kotvu," rozkázal kapitán. Píp bohužel nevěděl, jak se spouští kotva, protože se na lodi nikdy předtím neplavil. Uchopil ji do křídla a jen tak nazdařbůh ji hodil do vody. Vyvinul ale větší sílu, než měl v úmyslu, v důsledku čehož kotva letěla mnohem dál a náhodou trefila Boháčovu loď pod čarou ponoru. Ozval se dunivý úder a voda se s hukotem začala valit do podpalubí. Boháčova fregata se potápěla.

„Do záchranných člunů!" zavelel Boháč. Ptáci naskákali do člunů a veslovali pryč od potápějící se lodi. Cestou ještě museli pochytat ostatní členy posádky, kteří byli dříve smeteni vlnami.

Čimčarárum se svojí posádkou měli cestu k ostrovu s bankou volnou. Když přirazili k pobřeží a vyskákali na písečnou pláž, vrabčák Jack si vzpomněl, že na tomto ostrově je zakopaný pirátský poklad. Ten sestával z mušliček a drahokamů.

Úloha 3. *Mějme n mušliček v řadě. Do některé z mušliček počínaje časem $t = 0$ vždy po 1 s dáme drahokam. Ten z ní vyjmeme po dalších 2 s. Pravidla umisťování jsou taková, že:*

- *žádná mušlička v sobě nemá více než jeden drahokam současně,*
- *drahokam nesmí být vložen do mušličky, jež byla bezprostředně předtím uvolněná (do mušličky nemůže být vložen drahokam v čase t_1, pokud z ní byl v čase t_1 jiný drahokam vyjmut),*
- *žádné dvě mušličky vedle sebe nesmí současně obsahovat drahokam (může být však z jedné mušličky v čase t_2 drahokam vyjmut a do vedlejší mušličky v čase t_2 vložen),*
- *drahokamy se umísťují okamžitě po uplynutí 1 s, stejně tak jsou odebrány okamžitě poté, co uplynou 2 s.*

Kolik nejméně musí být mušliček, aby bylo výše uvedeným způsobem možné umisťovat drahokamy donekonečna?
Příklad: pro čtyři mušličky může stav vypadat následovně (umístíme drahokam do 1., potom do 4. a potom do 2. mušličky):

1. sekunda: Plná–Prázdná–Prázdná–Prázdná

2. sekunda: Plná–Prázdná–Prázdná–Plná

3. sekunda: Prázdná–Plná–Prázdná–Plná

...

Netrvalo jim ani minutu, než našli skrytý vchod za jedním stromem. Vstoupili do tajné chodby, která vedla pod ostrovem. Nebylo žádných pochybností, že na konci chodby se nachází bankovní trezor. Podle plánu měli lupiči banku vyloupit až za 30 minut.

S vědomím, že lupiči tu ještě nebudou, nevěnovali přílišnou pozornost svému okolí. Nevšimli si proto, že z temného zákoutí chodby je někdo pozoroval.

„Těšte se na variantu C," tiše si šeptal, počítaje následující příklad.

Úloha 4. *Trojúhelníkovým číslem rozumíme číslo tvaru* $\frac{n(n+1)}{1\cdot 2}$*, kde* n *je přirozené číslo. Čísla tvaru* $\frac{n(n+1)(n+2)}{1\cdot 2\cdot 3}$ *se nazývají čtyřstěnovými čísly. Dokažte, že platí následující tvrzení:*

1. *Trojúhelníkové číslo nemůže mít na místě jednotek ani jednu z číslic: 2, 4, 7, 9.*
2. *Součet prvních* n *trojúhelníkových čísel se rovná* n*-tému čtyřstěnovému číslu.*

(Důkaz můžeš provést např. geometricky, matematickou indukcí nebo pomocí sumy.)

Chodba postupně klesala níž a níž. Za zatáčkou následovaly schody nahoru. Byly dokonce jezdící, ale poháněné otroky, takže jejich rychlost nebyla zrovna největší.

Úloha 5. *Čirik nastoupil na pomalé jezdící schody, které jely nahoru, a při cestě nahoru vyšel přesně 30 schodů. Při cestě dolů šel po stejných schodech dvojnásobnou rychlostí a sešel přesně 48 schodů. Kolik schodů by musel vyjít, kdyby jezdící schody stály?*

Když zdárně zdolali schody, pokračovali jen pár kroků a ocitli se před dveřmi do trezoru. Byly na nich stopy po výbuchu a zela v nich díra. Vstoupili dovnitř a uviděli ty neřády, výtržníky, lotry, lupiče bankovní, jak si plní pytle penězi.

„Ale, ale, kohopak to tady máme?“ ozval se Pakáž, který si všiml nově příchozích.

„To jsou oni, to jsou oni!“ zakřičel Píp.

Druhý zloděj mezitím vystoupil ze stínu, takže jej bylo zřetelně vidět a pronesl: „Moji malincí ptáčkové, copak tu pohledáváte?“

Nebyl to nikdo jiný než jejich třídní učitelka. Ptáčci byli úplně v šoku, celou dobu si mysleli, že zlodějem byl jejich učitel matematiky.

„To byla celé jen strategie na odlákání pozornosti,“ pokračovala paní učitelka. „Záměrem bylo vás přesvědčit o tom, že zloděj je Kenár. Potom jste byli tak hloupí a podepsali falešné přiznání k vyloupení banky, což nám značně usnadnilo práci. Teď vás všechny čeká doživotní vězení, hahaha!“

Zlodějové se smáli tak hlasitě, že neslyšeli, jak kanár Kenár vstoupil do trezoru. Jediným úderem své mohutné sbírky příkladů oba omráčil.

„To byl další jednoduchý případ,“ konstatoval s ironickým nádechem.

„My jsme vás podezírali z krádeže, a přitom vy jste detektiv?“ nevěřícně se tázal Píp.

„Nejsem detektiv, ale když se naskytne možnost vyřešit tak jednoduchý příklad, ehm případ, tak proč ji nevyužít. Ostatně pan kolega Boháč mi jistě dá nějakou odměnu za záchranu jeho banky, takže půjdu do kasina.“

„Kasino,“ pravil ve stejný moment pan učitel Chuďas, „je další téma, o kterém bychom si mohli něco povědět. Například kolega Kořen, se kterým sdílím most, prý má výherní strategii na ruletu. Díky ní se mu povedlo prohrát miliony.“

Úloha 6. *Kořen tvrdí, že má výherní strategii na ruletu. Sází vždy na červenou 1 Kč. Když prohraje, svoji sázku zdvojnásobuje, dokud nevyhraje. Ve výsledku tak vždycky vyhraje 1 Kč. Má to ale zásadní chybu, pokud prohraje hodněkrát za sebou, nebude mít už peníze, aby zdvojnásobil svou sázku, a bude muset odstoupit ze hry. Jaká je pravděpodobnost, že se mu podaří zdvojnásobit své peníze (tedy nebude muset odstoupit ze hry), pokud má na začátku 1 024 Kč? Hraje ve štědrém kasinu, kde není nula, tudíž pravděpodobnost, že padne červená, je přesně 50 %.*

V tu chvíli naštěstí zazvonilo, protože ptáčci už měli dost Chuďasových sarkastických komentářů. Přestávka ale zároveň znamenala, že se již blížil čas, kdy si je pan ředitel plánoval zavolat a následně potrestat. Píp, Čirik a Čimčarárum se stihli s Kenárovou pomocí dostat do školy před 14:00. Chycení zloději, které policie zavřela do vězení, postačili jako dostatečný důkaz, že ptáčci banku nevyloupili. Vzhledem k tomu, že žáci měli mít následující hodiny s paní učitelkou třídní, která momentálně seděla ve vězení, pan ředitel rozhodl o mimořádném zkrácení vyučování. Nadšení ptáčci se rozletěli domů, až na pštrosa Šprtose, jenž musel jít pěšky, protože jako jediný neuměl létat. Tak i Píp s Čirikem šťastně doletěli do svého bydliště. Už bylo pozdě večer, a tak Píp hned ulehl do svého hnízda. První den ve škole byl pro něj velmi dlouhý, ba přímo nekonečně dlouhý.

Úloha 7. *Někdo si hraje s nekonečnou posloupností a_1, a_2, $a_3\ldots$ takovou, že za a_1, a_2 zvolil nějaká přirozená čísla a pro každé $k \geq 3$ určil další člen předpisem $a_k = a_{k-1} \cdot a_{k-2} - a_{k-2} + 1$. Dokažte, že každé přirozené $m > 1$ dělí jen konečně mnoho členů této posloupnosti.*
Nápověda: Když m dělí a_i pro nějaké přirozené i, může dělit taky a_{i+2}? A co pak a_{i+3}? Zkoumejte zbytky po dělení m.

Píp tak zdárně přežil první den v ptačí škole. Do konce školního roku už jich zbývalo jen 186.

KONEC