

Zadání druhé série

Termín odevzdání: 8. prosince

A pak se ozval podrážděný hlas: „První den školy a vy přijdete pozdě!“ zaskřehotala paní učitelka. Než stačili Píp s Čirikem něco říct, do dveří vletěl rozčilený kos. „Paní kolegyně, ve škole jsou zloději, vykradli váš kabinet!“ zazpíval. Oba učitelé vypadli ze dveří a zabouchli je za sebou.

„Volná hodina!“ zakřičeli sborem malí školáci. Kromě Pípa a Čirika chodili do třídy 1. A ještě: dva bratři Modřové, holub Podloundňák, husa jménem Jan, několik hezkých sýkorek, dva špačci Spáčové, vrabec Čimčararum, papoušek Nešika, kačenka Kačenka, Rerer s bratrem Fererem, pštros Šprtos a kukačka žijící v hodinách na stěně.

Úloha 0. *Umělecky znázorni třídu 1. A.*

Ve třídě vypukl naprostý chaos. Modřové začali po sobě házet houbou na tabuli. Podloundňák se začal mlátit s husou Janem. Špačci okamžitě usnuli a neprobudil je ani hlasitý zpěv sýkorek. Papoušek velice nešikovně poskakoval po třídě, až nakonec skončil v odpadkovém koši. Kačenka si napustila umyvadlo vodou a začala v něm plavat. Píp se snažil pomoci vrabci, který se náhodně motal po třídě a u toho mluvil nějakým nesrozumitelným jazykem. Čirik se snažil přeprat Podloundňáka, aby si získal obdiv sýkorek. Rerer se svým bratrem mezitím hrál hru.

Úloha 1. *Rerer a Ferer hrají hru. Rerer řekne libovolné přirozené číslo menší nebo rovno 10. Ferer přičte k tomuto číslu další přirozené číslo od 1 do 10 a oznámí součet. Rerer opět přičte libovolné přirozené číslo, ne větší než 10, a oznámí výsledek. Takto pokračují, dokud je součet menší než 100. Vyhrává ten, kdo první dosáhne trojčiferného čísla. Má někdo výherní strategii? Pokud ano, jakou?*

Pozn.: Výherní strategii je myšleno, že dovede vždycky vyhrát, nehledě na tahy protivníka.

Jediní dva malí opeřenci, kteří nic nevyváděli, byli kukačka a pštros. Kukačka netrpělivě seděla v hodinách na zdi a dívala se na hodinky, aby mohla ve správný čas zakukat konec hodiny. Pštros Šprtos si otevřel učebnici matematiky a začal počítat integrály. Během toho vyhrožoval ostatním, ať okamžitě přestanou zlobit, nebo všechno poví paní učitelce. Nikdo ho ale nevnímal a všichni pokračovali v tom, co dělali.

Učitelé mezitím řešili krádež v kabinetu. Dveře byly vypáčené nějakým ostrým zobákem. Uvnitř nebylo vůbec nic. Zmizely stoly, židle, papíry... Nejhorší ale bylo, že zmizela králíkárna.

Úloha 2. *Paní učitelka chová páry magických králíků. Takový magický králík je první měsíc svého života mládětem, poté se z něj stane dospělý (magičtí králíci jsou nesmrtelní). Žije po párech a každý měsíc, kdy je pár dospělý, porodí další pár magických králíků (magičtí králíci se neřídí běžnými zákony genetiky, takže jim nevádí křížení s příbuznými). Paní učitelka měla první měsíc jeden pár mládat. Druhý měsíc tedy měla jeden pár dospělých, třetí jeden pár mládat a jeden pár dospělých, čtvrtý jeden pár mládat a dva páry dospělých, pátý dva páry mládat a tři páry dospělých...*

Pan školník si všiml, že počet párů každý měsíc tvoří Fibonacciho posloupnost (posloupnost čísel začínající 1, 1, 2, 3, 5, kde každý další člen je součet předchozích dvou členů). Zdůvodněte, proč tomu tak je.

Dále navrhněte jiný magický druh, jehož počty každý měsíc tvoří Jacobsthalovu posloupnost (posloupnost čísel začínající 1, 1, 3, 5, 11, kde každý další člen je součet minulého členu a dvoj-násobku předminulého členu).

Paní učitelka byla z krádeže králíků velmi nešťastná. Trvalo jí několik měsíců, než namnožila dost králíků na to, aby se mohla živit jejich prodejem. Pan kos učil matematiku, a tak povídal: „Ještěže vám ty králíky ukradli, paní kolegyně. Za pár let by se vám přemnožili a byl by s tím velký problém.“ Paní učitelka uznala, že má pravdu, a nebyla už tolik smutná. Trvala ale na tom, že pachatel musí být dopaden a náležitě potrestán.

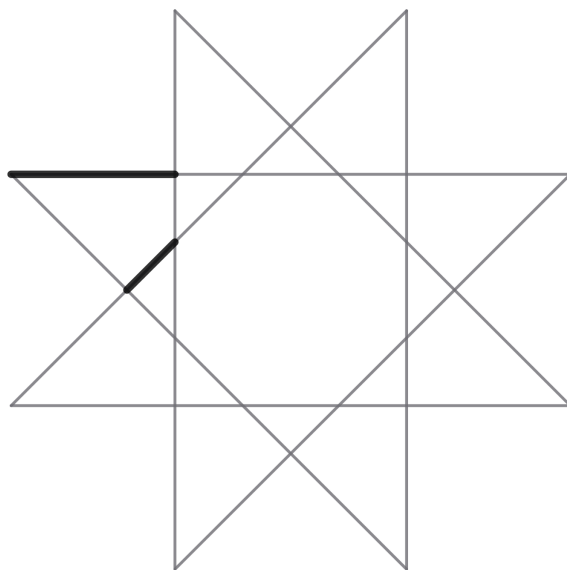
Pachatel se zrovna procházel po chodbě. Zaklepal na dveře a vešel do třídy 1. A. Nebyl to nikdo jiný než Pakáž, známý zloděj vajec. Když vešel do třídy, všichni ptáčci honem utíkali na svá místa. „Dobrý den, milí žáci,“ spustil Pakáž, „před námi je taková nemilá povinnost, musíte podepsat poučení o bezpečnosti.“ S těmi slovy jim podával papír. Ptáčci byli ještě nezkušení a mysleli si, že Pakáž je nějaký učitel, který má za úkol od nich sbírat podpisy. Jediný, kdo se odmítl podepsat, byl pštros. „Než podepíšeme poučení o bezpečnosti, tak nás přece musíte poučit!“ protestoval. „Tak jo, blablabla, jste poučení,“ mávl rukou Pakáž. „Ale takhle to nefunguje!“ Šprtos se nenechal obelstít. „Co ty mi do toho budeš kecat, já jsem učitel, ty ne!“ vybuchl Pakáž. „Jak myslíte, ale já to nepodepíšu,“ odpověděl pštros a pokračoval v počítání příkladu.

Úloha 3. Určete všechny možnosti celých čísel a , b , c takových, aby platila rovnost

$$a^2 + bc = abc.$$

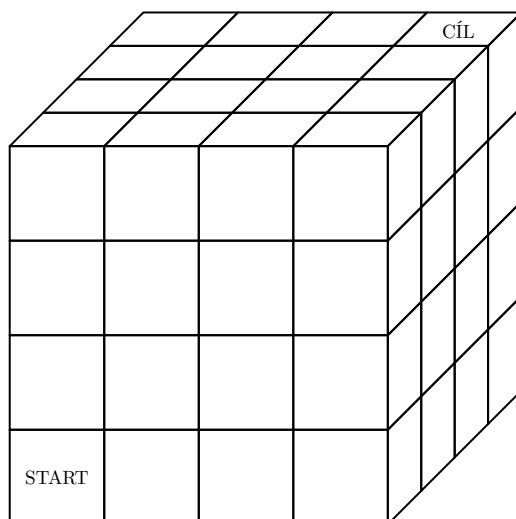
Pakáž chtěl něco namítnout, ale zrovna v tu chvíli se ozvalo: „Kuku, kuku, kuku!“ Kukání na přestávku znamenalo, že Pakáž rychle vyletěl ze třídy, přičemž mu na zem z kapsy vypadl nějaký papír. Ptáčci se opět pustili do zábavy. Za chvíli se ale ozval školní rozhlas: „Vážení prvňáci, dostavte se na vážení!“ Kvůli statistice bývalo zvykem vážit všechny malé ptáčky. V Ptačím království měřili váhu v oktagramech.

Úloha 4. Jsou dány dva shodné čtverce, oba se středem ve stejném bodě. Jeden ze čtverců je oproti druhému otočený o 45° . Spojením těchto čtverců získáme malý oktogram (osmicípou hvězdu). Když prodloužíme strany čtverců, přímky se protnou ve vrcholech velkého oktogramu. Spočítejte poměr stran malého ku velkému oktogramu.



Poté, co byli všichni ptáčci zvázeni, začala druhá hodina. „Omlouvám se za přerušení předchozí hodiny,“ začala paní učitelka, „ve škole máme zloděje, pokud byste viděli někoho podezřelého, okamžitě mi to nahláste.“ „Nikdo podezřelý tu nebyl,“ odpovědělo ptactvo. Pštros se snažil něco namítat, ale paní učitelka ho neslyšela. „Tak a teď si dáme hodinu pravopisu,“ pokračovala, „Pípe, s jakým i se píše píp?“ Píp ještě pravopis neuměl, a tak pípnul: „Ono je víc než jedno i?“ „To si piš, že je!“ odpověděla mile paní učitelka. „To jsme se ale ještě neučili,“ namítal vystrašený Píp. Paní učitelka byla naštěstí velmi hodná, a proto sladkým hláskem řekla: „To je učivo první třídy mateřské školy!“ „Prosím, co je to mateřská škola?“ pípnul špaček, který se zrovna probral ze zimního spánku. „Copak učím třídu plnou blbečků?!“ Paní učitelka nadále pokračovala v přátelské konverzaci. „Samozřejmě, že ne,“ rychle zareagoval Rerer. „To byla řečnická otázka, ty hlupáku!“ pochválila ho paní učitelka. „Prosím, paní učitelko,“ ozval se pštros Šprtos, „našel jsem tady podezřelý papír.“ Na papíře bylo napsáno: Plán vyloupení banky.

Úloha 5. Banka má tvar krychle $4 \times 4 \times 4$ (skládá se tedy z 64 menších kostiček). Zloděj začíná v kostičce vpředu vlevo dole a snaží se dostat do kostičky vzadu vpravo nahoře. Pohybovat se může mezi kostičkami se společnou stěnou a pouze směry dozadu, doprava a nahoru (nemůže se tedy vracet). Kolika různými způsoby se tam může dostat?

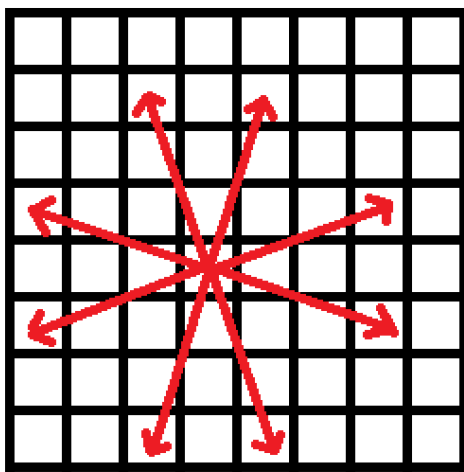


„Co je na tom prosím tě podezřelého?“ ptala se paní učitelka. „Je to úplně normální obrázek krychle, však se v matematice budete učit něco podobného.“ „Ale...“ „Žádné ale! Vraťme se zpět k výuce!“ Pštros už raději nic neříkal. „Teď mi řekni, Kačenko, jaké i se píše v této větě,“ pokračovala paní učitelka a napsala na tabuli následující větu: V_sel obilí na věšáku. „Píše se tam tvrdé y, protože někdo vysel obilí,“ odpověděla kačenka. „To není pravda, píše se tam měkké i, protože někdo visel na věšáku,“ hádal se s ní Podloudňák. „To já mám pravdu!“ „Ne, já mám pravdu!“ „Lžeš!“ „Přestaňte se hádat!“ pípla paní učitelka. „Copak oba žijete v jiné soustavě?“

Úloha 6. Pro jaké číslo v desítkové soustavě platí, že po převedení do devítkové soustavy má tvar \overline{aab} a po převedení do sedmičkové soustavy má tvar \overline{cbc} , kde a, b, c jsou nenulové číslice? Pozn.: Značení \overline{xyz} znamená, že číslo zapsané v nějaké číselné soustavě se skládá z cifer x, y, z . Tedy například, pokud má číslo v devítkové soustavě tvar \overline{aab} , má v desítkové hodnotu $9^2 \cdot a + 9 \cdot a + b$.

V tu chvíli naštěstí zakukalo a ptáčci vyletěli ze třídy. Třetí hodinu měli mít tělocvik, odebrali se proto do tělocvičny. Přivítal je přísně vypadající svalnatý orel. „Já vás budu učit tělesnou výchovu,“ zakvílel přísným hlasem. „Vlastně nebudu vás učit, ale dohlížet, že opravdu makáte!“ zařval na plný zobák tak hlasitě, že to probralo i špačky. „Hej, vy dva! Žádný spaní v hodině, to bude za dvacet!“ obořil se na ně. „Dvacet čeho?“ nechápali Spáčové. „Dvacet minut klikování bez přestávek!“ zakřičel na ně. „Dneska na vás budu velmi hodný, takže si můžete vybrat, jaký sport byste chtěli dělat,“ pokračoval orel. „Šachy!“ odpověděli jednohlasně všichni ptáčci. „Dobře,“ souhlasil tělocvikář, „ale budete se u toho hýbat!“ S těmito slovy donesl obrovskou šachovnici v životní velikosti.

Úloha 7. *Podloudňák stojí na šachovnici 8×8 a pohybuje se dvěma různými tahy, které za sebou střídá. Při prvním se jen posune na políčko napravo nebo nalevo od něj. Při druhém poskočí podobně jako šachový jezdec, ale místo posunu „o 2 políčka a 1 políčko“ se posune „o 3 políčka a 1 políčko“ stejným způsobem:*



Při třetím by se zase posunul doleva nebo doprava a tak dále.

Před prvním tahem stál Podloudňák na políčku v levém dolním rohu šachovnice a po k tazích se dostal na políčko v jejím pravém horním rohu. Jaký zbytek dává k po dělení čtyřmi?

Zatímco většina ptáčků hrála šachy, špačky museli dvacet minut klikovat. Již po minutě ale usnuli a tělocvikář je musel násilím opět probrat. Když usnuli podruhé, tak to vzdal a dal jim velkou pětku. Ptáčci dohráli šachy a mysleli si, že už je konec hodiny. „Ne, ještě není konec! Teď přijde to nejlepší! Pojďte za mnou!“ řekl orel. Odvedl je po schodech až na střechu bez zábradlí, kde se ráno Píp s Čirikem báli, že spadnou. „Teď vás naučím létat!“ zařval tělocvikář a začal se ďábelsky smát.

POKRAČOVÁNÍ V PŘÍŠTÍ SÉRII