KoMáR – 14. ročník
2025/2026
1. série

Ahoj!

Baví tě matematika? Máš rád/a řešení problémů, u kterých musíš použít hlavu? Díváš se na SPZ aut a všímáš si těch, které jsou dělitelné devíti?

Pokud byla alespoň jedna z odpovědí ano a ty sám/sama jsi ještě na základní škole (nebo v odpovídajícím ročníku víceletého gymnázia), pak je KoMáR určitě skvělý způsob, jak trávit nějaký ten volný čas. Při řešení získáš skvělou praxi, a pokud budeš úspěšný/á, rozhodně tě neminou hezké ceny. Navíc, když s námi pojedeš na soustředění, můžeš potkat spoustu zajímavých lidí, zahrát si parádní hry a dozvědět se i něco zajímavého z matematiky. Máš chuť to zkusit? Tak do toho!

Chystané **podzimní soustředění** se bude konat o víkendu 17.–19. 10. a přihlašování spustíme na našich stránkách už 1. září. Tak si termín poznač v kalendáři a přijeď. Moc se na tebe těšíme!

Řešení je možné odevzdávat pouze online, prostřednictvím našich webových stránek (***komar.math.muni.cz/upload.php***), a to buď zpracované v textovém editoru, nebo psané ručně a oskenované. Každou úlohu je nutné odevzdat zvlášť, nadepsanou jménem, příjmením a číslem úlohy. Úlohy je možné odevzdávat ve formátu PDF nebo jako obrázek (PNG, JPG, JPEG). Až tvoje úlohy opravíme, pošleme ti zprávu emailem. Pro odevzdávání řešení je nutné se na našich stránkách zaregistrovat, a to i pokud jsi řešil/a KoMáRa už loni.

Další informace nalezneš na našich stránkách ***komar.math.muni.cz***. Mimo jiné se tam nachází emaily organizátorů, na které se můžeš obracet s případnými dotazy ohledně semináře.

Hodně štěstí nejen při řešení KoMáRa přejí Matouš, Petra, Mojmír, Pavel, Svatka, Tobík, Ashok, Zuzka, Týnka, Petr, Arne, Michal a Verča.

Náš web:

komar.math.muni.cz

Náš instagram:

instagram.com/komar.math.muni

Jak řešit

V každé sérii je osm příkladů, cílem však není vyřešit všechny, proto neváhejte poslat byť i jediné řešení nebo jeho nástin. Abyste za svá odevzdaná řešení obdrželi co možná nejvíce bodů, je potřeba nejen úlohu vyřešit, ale zejména řešení správně a srozumitelně sepsat. Protože víme, že mnozí z vás se s podobnými úlohami setkávají poprvé a zformulovat dobře řešení není jednoduché, shrnuli jsme pro vás to nejdůležitější, co je potřeba před odevzdáváním úloh vědět.

Vaším cílem je vždy zodpovědět otázku ze zadání. Většinou však pouze výsledek nestačí, je potřeba dokázat, že máte pravdu a že jste našli všechna řešení. Opravující z vašeho řešení musí pochopit logické úvahy, které k výsledku vedly; pokud odevzdáte pouze změť rovnic, aniž byste vysvětlili, jak jste k nim došli, nedostanete plný počet bodů. Zároveň i pokud vaše řešení nebude kompletně správně, můžete získat body díky některým důležitým myšlenkám, které by k řešení vedly. Nebojte se tedy odevzdat třeba i jen náznak řešení, pokud nevíte, jak dál.

Můžete se setkat s různými druhy příkladů a ke každému z nich je potřeba přistupovat trošku jinak:

- **Kolik... / vypočítejte obsah... / zjistěte poloměr...**
  Většina úloh po vás bude chtít jako výsledek nějaké číslo. V takovém případě je potřeba jej najít, ale také dokázat, že jste nalezli řešení všechna a žádné jiné číslo řešením být nemůže. Toho lze docílit dvěma způsoby. Nejčastěji se setkáme s tím, že pomocí logických úvah dojdeme k podmínkám, které pro naše řešení musejí platit. To mohou být rovnice, nerovnice nebo třeba podmínka, že námi hledané číslo je prvočíslo. Na jejich základě pak najdeme všechna řešení a můžeme mít jistotu, že jsme na žádné nezapomněli. Dalším způsobem, jak takovou úlohu vyřešit, je řešení odhadnout a potom dokázat, že je jediné. To ovšem bývá komplikovanější a ve většině případů se něco takového dokazuje složitě.

- **Vyplňte tabulku... / vyřešte hlavolam... / doplňte...**
  Úloha číslo jedna typicky bývá nějakým logickým hlavolamem, jako je třeba sudoku. Pokud si úloha žádá pouze vyplnění tabulky podle určitého pravidla, stačí takové vyplnění najít, nemusíte každý krok popisovat a vysvětlovat.

- **Dokažte... / ukažte, že platí...**
  U takových úloh je potřeba logickými kroky dokázat platnost nějakého tvrzení, popřípadě ji vyvrátit. Pokud chcete ukázat, že nějaké tvrzení není pravdivé, stačí najít protipříklad. Naopak to ovšem neplatí. Nestačí vyzkoušet velké množství možností a prohlásit, že jelikož pro ně tvrzení platí, bude platit vždycky.
  Nejzákladnější metodou, jak něco dokázat, je takzvaný přímý důkaz. V takovém případě vycházíme z nějakých pravdivých předpokladů a postupnými logickými úvahami z nich vyvozujeme další závěry, až se dostaneme k tvrzení, které jsme chtěli dokázat. Dalším užitečným způsobem je důkaz sporem. Pokud například chceme dokázat, že nějaké celé číslo je sudé, podíváme se, co by se stalo, kdyby bylo liché. Pokud se nám podaří ukázat, že v takovém případě dojdeme k nějaké hlouposti, tedy sporu, dokázali jsme, že liché být nemůže, a bude proto sudé.

- **Vyjádřete... / spočítejte obecně...**
  Může se stát, že po vás úloha bude chtít, abyste spočítali nějakou hodnotu, ale místo konkrétních čísel v zadání najdete jen proměnné (písmenka). V takovém případě je

vaším úkolem výsledek vyjádřit pomocí těchto proměnných (může vám tak třeba vyjít, že číslo, které hledáte, je $2a + 1$). Zkuste postupovat stejně, jako byste místo písmen počítali s čísly (pokud vám to pomůže, klidně si úlohu prvně spočítejte pro nějaké konkrétní hodnoty; nezapomeňte ji potom ale vyřešit i obecně). Je také třeba pamatovat na to, abyste pro vyjádření použili pouze proměnné, které znáte ze zadání, a ne ty, které jste si sami zavedli.

Ve všech případech dbejte na to, aby vaše logické úvahy na sebe navazovaly a abyste je sepsali tak, že opravující váš tok myšlenek pochopí. Zejména si dejte pozor na následující:

- **Zřejmě / určitě / musí platit**
  Některé věci opravdu jsou zřejmé a není potřeba je dopodrobna vysvětlovat. Často ale v řešeních nacházíme nedokázaná tvrzení, u nichž nejsme schopni posoudit, jestli jim řešitelé opravdu rozumí a důkaz jim přijde triviální, nebo je pouze odhadli. Pokud si nejste jistí, vždy každou myšlenku radši rozepište, ať zbytečně nepřicházíte o body.

- **Známá tvrzení**
  Během řešení je povoleno používat internet i učebnice matematiky a často existují vzorečky, které vám s řešením mohou pomoci. (U komplikovanějších úloh dokonce v nápovědě odkazujeme na věty, které se pro vyřešení hodí znát.) Pokud nějakou větu nebo vzorec používáte, odkažte se na ni, ať opravující pozná, kde se daný vztah objevil. Taková tvrzení ve svých řešeních samozřejmě dokazovat nemusíte.

- **Řešte pro obecné případy**
  Pokud máte dokázat, že něco platí v trojúhelníku, je potřeba pracovat s obecným trojúhelníkem. Nestačí si nějaký trojúhelník zvolit a ověřit platnost v tomto jednom konkrétním případě, vaším úkolem je ukázat, že dané tvrzení platí vždy.

- **Důkaz rysem není důkaz**
  S důkazovými úlohami se setkáváme i v geometrii. Pracujte se shodnými trojúhelníky, dopočítávejte úhly, obsahy, hledejte podobnosti. Nestačí však úlohu narýsovat a výsledek změřit. I když se budete snažit sebevíc, rys nikdy nebude úplně přesný, a nelze ho tedy považovat za důkaz. Zejména to potom platí pro případy, kdy pracujete s nějakým obecným útvarem.

- **Nebojte se přiznat, že něco nevíte**
  Je možné, že se vám podaří vymyslet většinu důkazu, ale nějaký důležitý krok vám nepůjde dokázat. V takovém případě je naprosto v pořádku to do řešení napsat a odevzdat ho neúplné. I za část řešení můžete získat více bodů než za samotný výsledek a není žádná ostuda na některé věci nepřijít. Úlohy jsou pro základoškoláky opravdu těžké a nalezení i jen části správného řešení je velký úspěch.

- **Nezapomeňte se podepsat!**
  Díky elektronickému odevzdávání už není potřeba na každý papír vypisovat adresu, ročník nebo školu, překontrolujte si ale prosím, že vaše řešení má hlavičku s vaším jménem a číslem úlohy. Pomůže nám to při opravování a taky v případě, že své řešení omylem odevzdáte ke špatné úloze.

Pokud si něčím nebudete jistí, třeba během sepisování řešení, nebo vám nebude jasné, proč jsme vám strhli nějaké body, můžete se na nás obrátit přes e-mail a rádi vám poradíme a vše vysvětlíme :-).

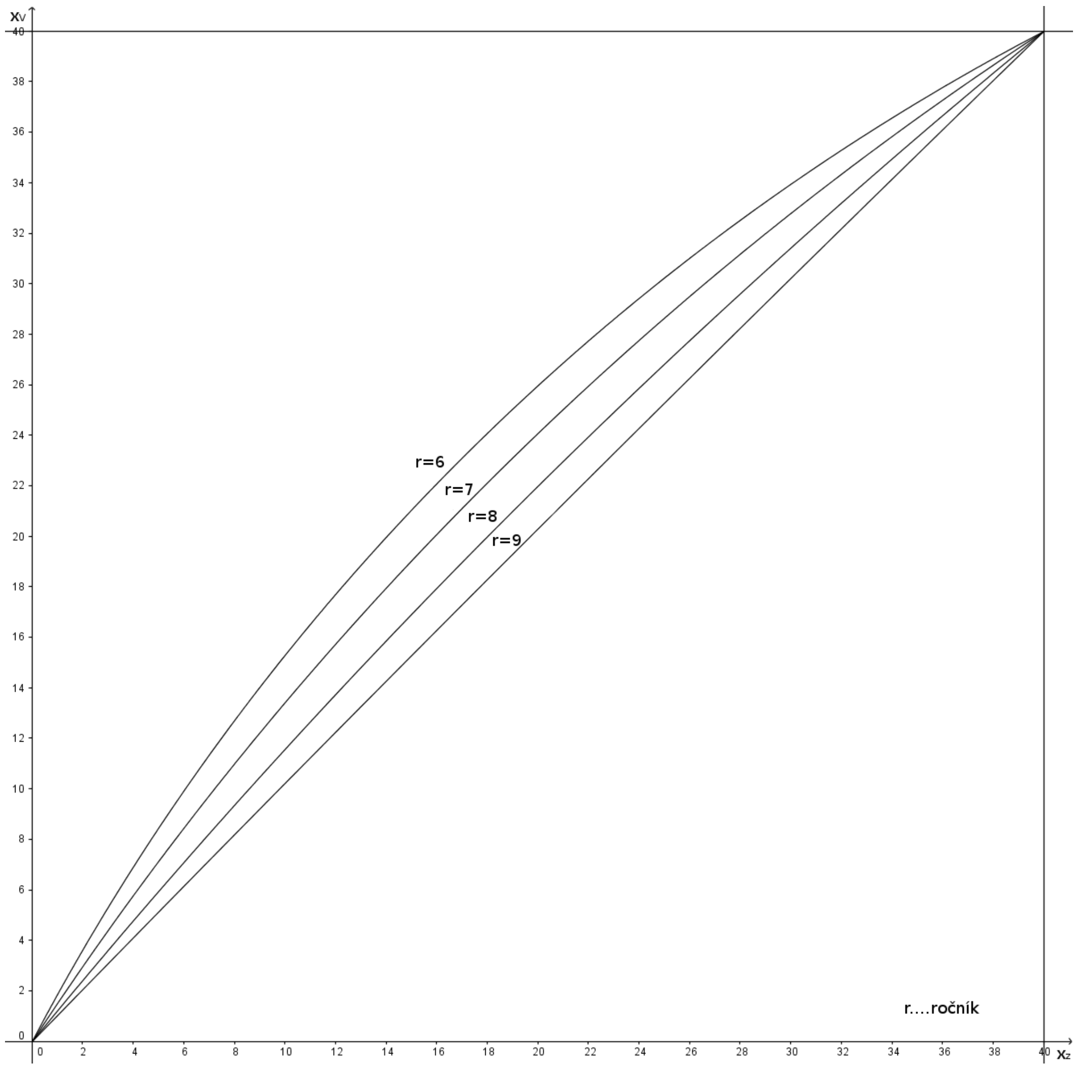
Příklady a bodování

Příklady jsou seřazeny od nejjednoduššího k nejobtížnějšímu. Přičemž za 0. příklad můžete obdržet až 2 body, za 1.–5. můžete obdržet až 5 bodů, za 6. až 6 bodů a za 7. až 7 bodů. Aby nebyli žáci vyšších tříd příliš zvýhodněni, tak jsme se rozhodli body přepočítávat podle níže uvedeného vzorečku:

$$x_v = \sqrt{(m + km)^2 + (km)^2 - (x_z - m - km)^2} - km,$$

kde x_v je výsledný počet bodů za sérii, x_z je součet získaných bodů za všechny úlohy a m je maximální možný počet bodů za sérii (tedy 40 bodů). k je koeficient závislý na ročníku podle následující tabulky:

Ročník	**Hodnota**
6.	1,4
7.	2,3
8.	5
9.	35



Zadání první série

Termín odevzdání: 3. listopadu

Bylo jednou jedno Ptačí království. V něm žilo všelijaké ptactvo. Slepice ovšem ne. Ty žily v sousedním Slepičinci, kde byly chovány na vajíčka. Časy, kdy kočovné kmeny slepic podnikaly nájezdy na ptačí vesnice, už jsou dávno pryč. Když moudrý Zobal, král z dynastie Zobalovců, sepsal svůj zákoník, zavládl v Ptačím království věčný mír. Počet opeřenců se zvyšoval, vesnice se rozrůstaly v města… Zkrátka země prosperovala. Nejvýznamnější ze sídel, Ptačí Ostrov, se stal vědecko-kulturním centrem království, kam se sjížděla inteligence z celého světa.

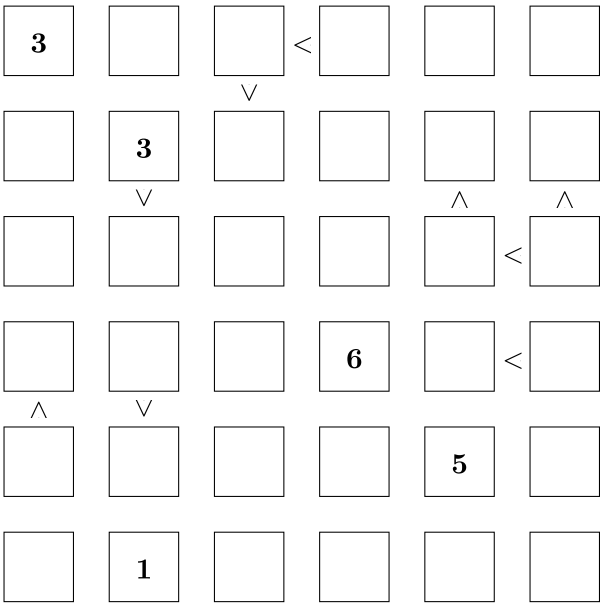
Právě na předměstí Ptačího Ostrova žil v jednom zapadlém hnízdě malý ptáček Píp. Nebyl to úplně obyčejný ptáček, protože jeho maminka byla straka jménem Pejpa a jeho tatínek byl sýkorák Pejp. Navíc měl velmi netypickou zářivě oranžovou barvu peří.

Úloha 0. *Umělecky znázorni, jak vypadá Píp.*

Píp to neměl lehké, místní ptáčata se mu smála, že je kříženec a jeho matka je straka zlodějka. To ale vůbec nebyla pravda. Pejpa sice pracovala ve zlatnictví, ale nikdy nic neukradla. Většina opeřenců ale věřila více na pověry než vlastnímu rozumu. Kromě toho, že straky kradou, si třeba mysleli, že když jim černá kočka přeběhne přes cestu, znamená to smůlu. Už tomu bude pár let, co někdo naposled spatřil kočku.

Z úvah o kočkách Pípa vyrušil křik z nějakého blízkého hnízda. „Chyťte zloděje!“ pípal podrážděný hlas. Píp chtěl přiletět na pomoc (i když ještě neuměl létat), ale nevěděl, ze kterého hnízda křik vychází.

Úloha 1. *Toto je mapa ptačích hnízd. Doplňte do každého políčka počet ptáčků tak, aby se v každém řádku i sloupci vyskytovalo každé z čísel 1–6 právě jednou a platily v tabulce zaznačené nerovnosti mezi čísly. U této úlohy není potřeba uvádět postup řešení.*



„Nech to na mně!“ pejpnul otec Pejp a odpejpal pryč. Stačilo mu dvojí mávnutí křídly a vznesl se nad všechny stromy. Z výšky hned uviděl dotyčné hnízdo. Stará sojka zoufale křičela, zatímco jí mizela vejce z hnízda. Zprvu se zdálo, že mizí úplně sama, ale jak se Pejp snesl níže, uviděl ty dva zlodějíčky, uličníky, rošťáky, poberty, budižkničemy, opeřence vypelichané.

Úloha 2. *V hnízdě je na kružnici rovnoměrně rozmístěno $4n+2$ vajec (tedy počet dělitelný 2, ale ne 4). Zloději Strakáž a Pakáž hrají hru, kdy střídavě odebírají po dvou vejcích z hnízda jedním z následujících způsobů:*

- *Odeberou 2 sousední vejce (vejce, mezi kterými na začátku ležel nenulový počet vajec, které ale byly odebrány, se pořád nepovažují za sousední).*
- *Odeberou 2 vejce, která jsou přesně naproti sobě (přímka, která je spojuje, prochází středem kružnice).*

Ten, který nemůže brát, prohrává. Začíná Strakáž. Ukažte, že Strakáž má výherní strategii, tedy že dovede vždy vyhrát, nehledě na to, jak hraje Pakáž.

Pejp viděl, že sám na ně nestačí. Byli totiž dva a on byl jen jeden. Zatelefonoval proto rychle ptačí policii. Za chvíli přiletěl velký černý havran v policejní uniformě. „Pip, pip, tady je ptačí policie! Co se tady děje?!“ zakrákal policista. Strakáž a Pakáž se lekli, nechtěli přece skončit v kleci, a začali rychle vracet všechna vejce zpět do hnízda. „Vy zlodějíčci, uličníci, rošťáci, pobertové, budižkničemové, opeřenci vypelichaní! Tohle je naposled, co jsem vás viděl krást, příště půjdete do klece!“ zahřměl havran a zloději raději vzali křídla na ramena. Dobře si ale zapamatovali, kdo byl ten pták, co na ně policii zavolal.

Píp se mezitím chystal, že půjde další den poprvé do školy. Jeho maminka Pejpa se o něho bála a nechtěla ho pustit samotného. Škola byla až na vzdáleném Ptačím Ostrově a maličký Píp ještě ani neuměl létat. Proto si Píp musel sehnat někoho, s kým by šel. Potřeboval ovšem, aby ten někdo byl nesoudělný, protože pak by se s ním nemusel dělit o svačinu.

Úloha 3. *Hledáme dvě nesoudělná přirozená čísla, jejichž součet je roven 100. Kolik takových dvojic čísel existuje?*

Naštěstí se našel sousedovic Čirik, který měl shodou okolností taktéž jít poprvé do školy. Dohodli se tedy, že půjdou spolu.

Vyrazili již o šesté ráno, aby se dostali do školy včas. V Ptačím království se chodí na sedmou, aby ptáci mohli mít deset vyučovacích hodin a zároveň stihli večeři. Cesta to byla vskutku náročná. Nejprve šli kolem staveniště, kde probíhala výstavba nových hnízd. Pak odbočili na pole, kde se málem ztratili ve vysokém porostu obilnin. Trvalo jim notnou chvíli, než našli cestu k malému rybníčku. Prošli kolem Čápovy žabí farmy a pokračovali dál lesem. Je známý fakt, že ptáci létají vzdušnou čarou. Píp s Čirikem ovšem museli obcházet překážky, které by jiný přeletěl. Když už si mysleli, že mají nejhorší za sebou, do cesty se jim postavila hora.

Úloha 4. *Mějme horu ve tvaru pravidelného kužele s kruhovou podstavou o poloměru 1 cm mající výšku 2 cm.*

- *Píp horu obejde na druhou stranu po obvodu podstavy (půlkružnice).*
- *Čirik vystoupá nějakou vzdálenost po plášti směrem k vrcholu, poté obejde zbytek po půlkružnici rovnoběžné s podstavou a sestoupá nejkratší cestou po plášti zpět dolů.*

Označme $h > 0$ výšku, do které Čirik vystoupal.
Která z osob projde svou trasu dřív v závislosti na h? Obě osoby se pohybují stejnou nenulovou rychlostí. Jaká by musela být výška hory (kladná), aby byl výsledek jiný?

Každý svou cestou zdárně překonal horu a dole na sebe počkali. Před sebou měli poslední překážku, obrovské jezero, uprostřed kterého ležel Ptačí Ostrov. Pro většinu ptáků by to nebyl žádný problém, neboť by jezero jednoduše přeletěli, ale jak už zde bylo řečeno snad tisíckrát, Píp ani Čirik ještě neuměli létat. Naštěstí na ostrov vedl i dlouhý dřevěný most, po kterém obchodníci převáželi těžké zboží. Do města vozili například obilí, žížaly, materiál na stavbu hnízda nebo rum. Z města se vraceli buď s penězi, nebo drahými výrobky od místních firem.

„Kam jdete?“ zeptal se Pípa a Čirika strážný na mostě, přestože odpověď byla zřejmá. „My jdeme do školy na Ptačí Ostrov,“ pípl Píp. „To je příliš neurčité, uveďte prosím jeden ze sta tisíc důvodů své cesty,“ nedal se odbýt strážný, podávaje jim dlouhý seznam.

Úloha 5. *Píp si vybral číslo $x \in \{1, \dots, 100000\}$ a všiml si, že zápis čísla $\frac{1}{x}$ má poslední nenulovou cifru za desetinnou čárkou na k-té pozici (je jich tedy jen konečně mnoho). Jaké největší může k být?*

Strážný si poznamenal číslo důvodu, které mu Píp řekl, a pustil je na most. Cesta po mostě byla nebezpečná, protože most byl úzký a kymácel se ve větru. Nakonec se jim podařilo dostat na druhou stranu, aniž by přišli do styku s dihydrogenem monooxidem. Když vstupovali městskou bránou, Čirik si všiml, že hodiny na věži ukazují za pět minut sedm. Museli si pospíšit, pakliže nechtěli přijít pozdě, pomyslel si. Ptačí Ostrov byl velice vyspělým městem, proto měli na křižovatkách šipky. Podle nich Píp s Čirikem stihli doběhnout ke školní budově, právě když školník zamykal. „Ani nevíte, jak obrovské máte štěstí!“ zakrákal. Teď potřebovali co nejrychleji najít svoji třídu. Došli k nějakým dveřím. „Tohle je určitě naše třída,“ povídá Čirik. Píp na nic nečekal, otevřel dveře a vstoupil. První, čeho si všiml, byl příklad na tabuli:

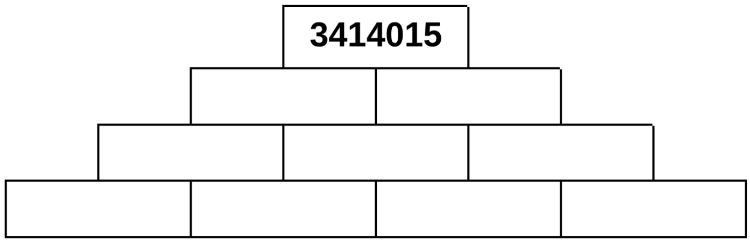
Úloha 6. *Najděte všechna reálná řešení dvou rovnic o třech neznámých:*

$$x + y = 2,$$
$$xy - z^2 = 1.$$

„Vítejte, pane kolego,“ ozval se hlas od učitelského stolu. Píp si všiml, že ptáčci ve třídě jsou mnohem větší než on. Došlo mu, že je ve špatné třídě, a tak honem pípnul: „Pardon, já vás nerad vyrušil, hned odcházím.“ „V tom případě vám píšu brzký odchod,“ opět se ozval ten hlas. To už ale byl Píp zpátky na chodbě. „Asi jsem se spletl,“ řekl Čirik, „není to 1. A, ale 10. A.“ „To je v pohodě, nic se nestalo,“ odpověděl Píp a šli dál po chodbě.

Prošli kolem různých tříd, školní jídelny, tělocvičny, sklepa i ředitelny. Svoji třídu ale ne a ne najít. Nakonec se dostali až na školní dvůr. Byla to rozlehlá plocha, uprostřed které stálo hřiště. Na něm zrovna nějací starší ptáčci pod dohledem tělocvikáře létali na čas. Až teď si Píp s Čirikem všimli, jak velká je školní budova.

Úloha 7. *Školní budova má tvar pyramidy, jako je na obrázku, pro kterou platí, že kostka, která stojí nad dvěma kostkami pod ní, obsahuje součin čísel v těchto dvou kostkách. Všechna čísla v kostkách jsou přirozená a nahoře je číslo 3414015. Kolik je možností, jak může vyplněná pyramida vypadat?*



„Naše třída bude asi úplně nahoře,“ napadlo Pípa. Zamířili proto k nejbližšímu schodišti. Stoupali čím dál výš, až se dostali na střechu. Bylo to nebezpečné místo, neboť mu chybělo zábradlí. Architekti zřejmě zapomněli, že do školy chodí i malí ptáčci, kteří ještě neumí létat. Na druhé straně střechy byla poslední kostka pyramidy. Naštěstí měla vstup, a tak ti dva malí ptáčci mohli vejít do krátké chodby. Bylo tam jen pár dveří, ale hned na prvních bylo napsáno:

TŘÍDA 1. A

Píp s Čirikem se nadechli, vstoupili do dveří a pak…

POKRAČOVÁNÍ V PŘÍŠTÍ SÉRII