

## Řešení 5. série

**Úloha 1.** Havran obchoduje s klobouky a deštníky. V Kloboukovicích ( $K$ ) se dá klobouk koupit za 2 peníze a deštník prodat za 8 peněz. V Deštníkově ( $D$ ) se dá klobouk prodat za 3 peníze a deštník koupit za 6 peněz. Havran cestuje mezi městy v tomto pořadí

$$K \rightarrow D \rightarrow K \rightarrow D \rightarrow K \rightarrow D \rightarrow K$$

a při každé návštěvě města vždy prodá všechno zboží, které má, a nakoupí tolik zboží, na kolik mu stačí peníze. Kolik musí mít na začátku peněz, aby na konci měl aspoň 36 peněz?

### Řešení:

Havran vždy kupuje co největší množství zboží, tedy mezi městy převáží menší obnos peněz, než je kupní cena. Jelikož se zboží kupuje levněji, než se prodává, je převážené množství peněz vždy menší než cena, za kterou se dalo koupit převážené zboží. Můžeme proto potřebné množství peněz počítat odzadu.

- Havran končí po třech cestách v Kloboukovicích s minimálně  $36 = 4 \cdot 8 + 4$  penězi. Proto do nich dovezl minimálně 4 deštníky a 4 peníze k tomu (případně místo těchto peněz mohl mít další deštník). Na koupi 4 deštníků v Deštníkově potřeboval  $4 \cdot 6 = 24$  peněz, před nakoupením deštníků v Deštníkově tedy musel mít aspoň  $24 + 4 = 28$  peněz.
- Havran měl při třetí návštěvě Deštníkova aspoň  $28 = 9 \cdot 3 + 1$  peněz, dovezl do něj tedy minimálně 9 klobouků a 1 peníz (nebo další klobouk). Na koupi 9 deštníků v Kloboukovicích potřeboval  $9 \cdot 2 = 18$  peněz, musel tedy mít aspoň  $18 + 1 = 19$  peněz.
- Po dvou cestách měl havran v Kloboukovicích aspoň  $19 = 2 \cdot 8 + 3$  peněz, dovezl do něj tedy minimálně 2 deštníky a 3 peníze (nebo další deštník). Na to musel předtím v Deštníkově mít aspoň  $2 \cdot 6 + 3 = 15$  peněz.
- Při druhé návštěvě Deštníkova měl havran aspoň  $15 = 5 \cdot 3$  peněz, dovezl do něj tedy minimálně 5 klobouků. Na to musel předtím v Kloboukovicích mít aspoň  $5 \cdot 2 = 10$  peněz.
- Po první cestě měl havran v Kloboukovicích aspoň  $10 = 1 \cdot 8 + 2$  peněz, dovezl do něj tedy minimálně 1 deštník a 2 peníze (nebo další deštník). Na to musel předtím v Deštníkově mít aspoň  $1 \cdot 6 + 2 = 8$  peněz.
- Při první návštěvě Deštníkova měl havran aspoň  $8 = 2 \cdot 3 + 2$  peněz, dovezl do něj tedy minimálně 2 klobouky a 2 peníze (nebo další klobouk). Na to musel předtím v Kloboukovicích (tedy na začátku) mít aspoň  $2 \cdot 2 + 2 = 6$  peněz.

Havran musel na začátku mít aspoň 6 peněz.

**Úloha 2.** *Mám tři po sobě jdoucí přirozená čísla, první z nich se zapíše v šestnáctkové soustavě pouze jednou číslicí. Třetí z nich je prvočíslem. Součet všech těchto tří čísel je dělitelný osmi. Jaká po sobě jdoucí čísla mám?*

**Řešení:**

První číslo jde zapsat v šestnáctkové soustavě jednou číslicí, takže první číslo musí být mezi 1 a 15 (0 není přirozené číslo), protože 16 a vyšší čísla už zapíšeme více číslicemi.

Třetí číslo je prvočíslem, takže mezi 3 a 17 vybereme pouze prvočísla (číslo je o dva vyšší než první číslo z po sobě jdoucích čísel). Což jsou: 3, 5, 7, 11, 13, 17.

Vypíšeme možné trojice z těchto prvočísel, když víme, že tato tři čísla jdou po sobě:

- 1 2 3
- 3 4 5
- 5 6 7
- 9 10 11
- 11 12 13
- 15 16 17

Vyšší kombinace už být nemohou, protože první číslo je mezi 1 a 15.

Součet všech tří po sobě jdoucích čísel má být dělitelný 8. Zkontroluji tuto vlastnost u zjištěných možných trojic.

- $1 + 2 + 3 = 6$
- $3 + 4 + 5 = 12$
- $5 + 6 + 7 = 18$
- $9 + 10 + 11 = 30$
- $11 + 12 + 13 = 36$
- $15 + 16 + 17 = 48$

Jediný součet dělitelný 8 je poslední, a to číslo 48.

Všechny vlastnosti splňuje pouze jedna trojice po sobě jdoucích čísel, a to 15, 16, 17.

**Úloha 3.** Mějme  $n$  mušliček v řadě. Do některé z mušliček počínaje časem  $t = 0$  vždy po 1 s dáme drahokam. Ten z ní vyjmeme po dalších 2 s. Pravidla umístování jsou taková, že:

- žádná mušlička v sobě nemá více než jeden drahokam současně,
- drahokam nesmí být vložen do mušličky, jež byla bezprostředně předtím uvolněná (do mušličky nemůže být vložen drahokam v čase  $t_1$ , pokud z ní byl v čase  $t_1$  jiný drahokam vyjmut),
- žádné dvě mušličky vedle sebe nesmí současně obsahovat drahokam (může být však z jedné mušličky v čase  $t_2$  drahokam vyjmut a do vedlejší mušličky v čase  $t_2$  vložen),
- drahokamy se umísťují okamžitě po uplynutí 1 s, stejně tak jsou odebrány okamžitě poté, co uplynou 2 s.

Kolik nejméně musí být mušliček, aby bylo výše uvedeným způsobem možné umísťovat drahokamy donekonečna?

*Příklad: pro čtyři mušličky může stav vypadat následovně (umístíme drahokam do 1., potom do 4. a potom do 2. mušličky):*

1. sekunda: Plná–Prázdná–Prázdná–Prázdná

2. sekunda: Plná–Prázdná–Prázdná–Plná

3. sekunda: Prázdná–Plná–Prázdná–Plná

...

### Řešení:

Úloha je symetrická, tedy vlastnosti první mušličky zleva platí symetricky pro první mušličku zprava.

Označme si vždy mušličky po řadě písmeny A, B, C, ...

- 1 mušlička ( $n = 1$ ): Na začátku ( $t = 0$ ) do mušličky A umístíme jeden drahokam, který bychom měli vyjmout v čase  $t = 2$ . V čase  $t = 1$  musíme umístit druhý drahokam, avšak jediná mušlička je plná, tedy tato možnost nelze.
- 2 mušličky ( $n = 2$ ): Na začátku ( $t = 0$ ) do mušličky A umístíme jeden drahokam, který bychom měli vyjmout v čase  $t = 2$ . V čase  $t = 1$  musíme umístit druhý drahokam, ten bychom chtěli umístit do volné mušličky B, avšak to by byly dva drahokamy vedle sebe, tedy toto nelze. Úloha je symetrická, tedy umístit drahokam na začátku do mušličky B dopadne stejně.
- 3 mušličky ( $n = 3$ ): Nyní můžeme začít dvěma způsoby, buď umístíme první drahokam do některé z krajních mušliček (A, C), nebo do prostřední (B).
  - Krajní mušlička (řekněme A): V  $t = 0$  umístíme drahokam do A, v  $t = 1$  musíme umístit druhý drahokam – do B nemůžeme, protože by byly dva drahokamy ve vedlejších mušličkách, tedy jej umístíme do C. V čase  $t = 2$  musíme umístit třetí drahokam. Nyní právě zmizel drahokam z mušličky A, ale v mušličky C drahokam stále je. Nemáme tedy kam umístit, protože v B by byly dva drahokamy vedle sebe, zatímco v A bychom porušili pravidlo, že nesmí být do mušličky umístěn drahokam bezprostředně poté, co z ní byl jiný vyjmut.
  - Prostřední mušlička (B): V  $t = 0$  umístíme drahokam do B, v  $t = 1$  musíme umístit druhý drahokam, ale A i C jsou vedle B, tedy neumístíme.

Pro 3 mušličky tedy také nemůžeme umísťovat donekonečna.

- 4 mušličky ( $n = 4$ ): Opět můžeme začít dvěma způsoby, buď umístit do vnějších mušliček (A, D), nebo do vnitřních mušliček (B, C).
  - Vnější mušlička (řekněme A): V čase  $t = 0$  umístit do A, v čase  $t = 1$  nemůžeme umístit do vedlejšího B, ale můžeme do C i D, tedy se zde případ větví:
    - \* C: Poté v čase  $t = 2$  nemůžeme nikam umístit. Nemůžeme do B ani D, protože ty jsou vedle C. Nemůžeme do A, protože z toho právě drahokam mizí.
    - \* D: V čase  $t = 2$  nemůžeme umístit do C ani do A, tudíž musíme B. Pro  $t = 3$  již ale nemůžeme nikam umístit, neboť nesmíme umístit do A ani C, které jsou vedle B, ani do právě uvolněného D.
  - Vnitřní mušlička (řekněme B): V čase  $t = 0$  umístit do B, tedy v  $t = 1$  nám nezbývá nic jiného, než umístit do D (A a C jsou vedle B). V  $t = 3$  nemůžeme umístit do C, jež je vedle D, ani do právě uvolněného B, a tak drahokam dáme do A. V  $t = 4$  nemůžeme umístit do vedle ležícího B ani do právě uvolněného D, tedy umístit do C. V čase  $t = 5$  nemůžeme umístit do B, D, jež jsou vedle C, ani do právě vyprázdněného A.

Pro 4 mušličky tedy také nemůžeme umísťovat donekonečna.

- 5 mušliček ( $n = 5$ ): Můžeme začít třemi způsoby, a to A (symetrické s E), B (symetrické s D) nebo C.
  - Krajní mušlička (řekněme A): V čase  $t = 0$  umístit do A, v čase  $t = 1$  nemůžeme umístit do vedlejšího B, ale můžeme do C, D i E.
    - \* C: V čase  $t = 2$  umístit do C, tedy v čase  $t = 3$  nemůžeme umístit do B ani D, jež leží vedle, ani do A, odkud byl právě drahokam odstraněn, tudíž umístit do E. V čase  $t = 4$  nemůžeme umístit do D, jež je vedle, ani do uvolněného C, tedy můžeme umístit do A nebo B.
      - A: V čase  $t = 4$  umístit do A. V čase  $t = 5$  nesmíme umístit do E, jež se právě uvolnilo, ani do B, které leží vedle A. Můžeme však umístit do C, čímž se dostaneme do stejné situace, jako když jsme umístiti do C v čase  $t = 2$ , tedy jsme našli smyčku a můžeme umísťovat donekonečna.

Musíme mít minimálně 5 mušliček, abychom mohli umísťovat donekonečna.

**Úloha 4.** Trojúhelníkovým číslem rozumíme číslo tvaru  $\frac{n(n+1)}{1 \cdot 2}$ , kde  $n$  je přirozené číslo. Číslo tvaru  $\frac{n(n+1)(n+2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}$  se nazývají čtyřstěnovými čísly. Dokažte, že platí následující tvrzení:

1. Trojúhelníkové číslo nemůže mít na místě jednotek ani jednu z číslic: 2, 4, 7, 9.
2. Součet prvních  $n$  trojúhelníkových čísel se rovná  $n$ -tému čtyřstěnovému číslu.

(Důkaz můžeš provést např. geometricky, matematickou indukcí nebo pomocí sumy.)

### Řešení:

1. Nechť  $k$  je trojúhelníkové číslo. Potom platí:  $k = \frac{n(n+1)}{1 \cdot 2}$ , upravíme:  $n^2 + n - 2k = 0$ .

Dostali jsme kvadratickou rovnici, kterou podle vzorce upravíme:  $n = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8k}}{2}$ . Ze zadání víme, že  $n$  je přirozené číslo, tedy musí platit, že  $1 + 8k$  je čtverec – kvadrát.

Vypíšeme si čísla na místě jednotek (tedy modulo 10) pro:

$k$	$8k$	$8k + 1$	číslo	kvadrát
0	0	1	0	0
1	8	9	1	1
2	6	7	2	4
3	4	5	3	9
4	2	3	4	6
5	0	1	5	5
6	8	9	6	6
7	6	7	7	9
8	4	5	8	4
9	2	3	9	1

Vidíme, že aby  $k$  bylo celé číslo, musí  $8k + 1$  končit na jednu z číslic v pravém sloupečku (musí být kvadrát), tzn. že  $8k + 1$  musí končit na 0, 1, 4, 5, 6, 9, tedy  $k$  končí pouze na 0, 1, 3, 5, 6, 8. Pro zbylé možnosti  $k$  by odmocnina nebyla celé číslo, tudíž ani  $n$  by nebylo celé číslo. Tím jsme dokázali, že  $k$  (trojúhelníkové číslo) nemůže končit na 2, 4, 7, 9.

2. Trojúhelníkové číslo  $T_k$  vyjadřuje počet bodů uspořádaných do rovnostranného trojúhelníku o  $k$  řadách, protože v první řadě je 1 bod, ve druhé 2 body, ... a v  $k$ -té řadě  $k$  bodů, takže celkový počet bodů je součet  $1 + 2 + \dots + k = \frac{n(n+1)}{1 \cdot 2} = T_k$ .

Čtyřstěnové číslo  $Q_n$  lze chápat jako počet bodů ve trojrozměrném jehlanu, který má  $n$  vrstev. Každá vrstva je rovnostranný trojúhelník o straně 1, 2, ...,  $n$ . Uspořádáme-li tedy trojúhelníková čísla  $T_1, T_2, \dots, T_n$  jako vrstvy nad sebou, vytvoříme přesně tento pravidelný jehlan – tedy geometrický objekt odpovídající definici  $Q_n$ .

Počet bodů v tomto útvaru je právě součet těchto vrstev:

$T_1 + T_2 + \dots + T_n = Q_n$ , což znamená, že jsme dokázali zadání.

**Úloha 5.** Čirik nastoupil na pomalé jezdící schody, které jely nahoru, a při cestě nahoru vyšel přesně 30 schodů. Při cestě dolů šel po stejných schodech dvojnásobnou rychlostí a sešel přesně 48 schodů. Kolik schodů by musel vyjít, kdyby jezdící schody stály?

**Řešení:**

Označíme si počet schodů nutný k vystoupení, když jezdící schody stojí, jako  $x$ .

Při cestě nahoru vyjde Čirik 30 schodů a zbytek z  $x$  za něj vyjedou schody, tedy vyjde  $x - 30$ .

Poměr rychlostí schodů a Čirika je tedy  $\frac{30}{x-30}$ , jenomže dolů jde Čirik dvakrát rychleji a schody jdou nahoru stále stejně. Proto se náš poměr zdvojnásobí na  $\frac{60}{x-30}$ . Tento poměr rychlostí bude platit i při Čirikově cestě dolů, kdy schody jedou proti němu. Víme, že po čas, co šel dolů, jeli celou dobu schody nahoru, takže poměr 48 ku tomu, co vyjeli schody nahoru, je  $\frac{60}{x-30}$ . Proto schody ujeli nahoru  $48 \cdot \frac{1}{\frac{60}{x-30}}$ , tedy  $\frac{48 \cdot (x-30)}{60}$ .

Když od 48 schodů, co Čirik sešlapal dolů, odečteme počet schodů, co jezdící schody za stejnou dobu vyjely nahoru, dostaneme, kolik schodů bych musel jít dolů, kdyby schody stály (tedy  $x$ ). Z toho dostáváme rovnici:

$$\begin{aligned} 48 - \frac{48 \cdot (x - 30)}{60} &= x && / \cdot 60 \\ 48 \cdot 60 - 48 \cdot (x - 30) &= 60 \cdot x \\ 2880 - 48 \cdot x + 1440 &= 60 \cdot x && / + 48 \cdot x \\ 4320 &= 108 \cdot x && / : 108 \\ 40 &= x \end{aligned}$$

Dostáváme tedy jediné řešení  $x = 40$ .

**Úloha 6.** Kořen tvrdí, že má výherní strategii na ruletu. Sází vždy na červenou 1 Kč. Když prohraje, svoji sázku zdvojnásobuje, dokud nevyhraje. Ve výsledku tak vždycky vyhraje 1 Kč. Má to ale zásadní chybu, pokud prohraje hodněkrát za sebou, nebude mít už peníze, aby zdvojnásobil svou sázku, a bude muset odstoupit ze hry. Jaká je pravděpodobnost, že se mu podaří zdvojnásobit své peníze (tedy nebude muset odstoupit ze hry), pokud má na začátku 1 024 Kč? Hraje ve štědrém kasinu, kde není nula, tudíž pravděpodobnost, že padne červená, je přesně 50 %.

**Řešení:**

$1024 = 2^{10}$ , jedná se o mocninu dvojky, tedy pravděpodobnost, že bude muset odstoupit během jednoho sázení je  $\frac{1}{1024}$ . To platí pro všechny hodnoty Kořenova jmění až po 2047. Potom je pravděpodobnost již pouze  $\frac{1}{2048}$ . Aby měl 2047 peněz, musí sázet  $1023\times$  (každým vydělá 1 Kč). Pravděpodobnost, že nebude muset odstoupit v jedné hře je  $\frac{1023}{1024}$ , hraje  $1023\times$ , tedy umocníme na 1023. U poslední sázky je pravděpodobnost, že vyhraje  $\frac{2047}{2048}$ , vynásobíme naši pravděpodobnost tímto číslem. Dostáváme pravděpodobnost že zdvojnásobí své peníze

$$\left(\frac{1023}{1024}\right)^{1023} \cdot \frac{2047}{2048} \doteq 0,368.$$

**Úloha 7.** Někdo si hraje s nekonečnou posloupností  $a_1, a_2, a_3 \dots$  takovou, že za  $a_1, a_2$  zvolil nějaká přirozená čísla a pro každé  $k \geq 3$  určil další člen předpisem  $a_k = a_{k-1} \cdot a_{k-2} - a_{k-2} + 1$ . Dokažte, že každé přirozené  $m > 1$  dělí jen konečně mnoho členů této posloupnosti. Nápověda: Když  $m$  dělí  $a_i$  pro nějaké přirozené  $i$ , může dělit taky  $a_{i+2}$ ? A co pak  $a_{i+3}$ ? Zkoumejte zbytky po dělení  $m$ .

**Řešení:**

Pojďme se zamyslet nad tím, co se stane, když nějaké číslo dělí nějaký člen posloupnosti – předpokládejme, že přirozené  $m > 1$  dělí  $a_i$  pro  $i$  přirozené, potom z předpisu máme

$$a_{i+2} = a_{i+1} \cdot a_i - a_i + 1,$$

a proto dává číslo  $a_{i+2}$  zbytek 1 po dělení  $m$ .

Tvrzení. Když pro přirozené  $l \geq 2$  dává  $a_l$  zbytek 1 po dělení  $m$ , pak ho dává i  $a_{l+1}$ .

Důkaz. Zapišme  $a_l = nm + 1$  pro  $n$  celé. Pak z předpisu máme

$$a_{l+1} = a_l \cdot a_{l-1} - a_{l-1} + 1 = (nm+1) \cdot a_{l-1} - a_{l-1} + 1 = nm \cdot a_{l-1} + a_{l-1} - a_{l-1} + 1 = m \cdot (n \cdot a_{l-1}) + 1,$$

tedy  $a_{l+1}$  dává zbytek 1 po dělení  $m$ . Hotovo.

Aplikováním předchozího tvrzení na  $l = i + 2$  vidíme, že  $a_{i+3}$  dává zbytek 1 po dělení  $m$ . Dále bychom ho mohli použít pro  $l = i + 3$  a pak by také  $a_{i+4}$  dávalo zbytek 1 po dělení  $m$ . Takto bychom mohli pokračovat stále dál (formálně se tento postup nazývá důkaz indukcí), takže si můžeme snadno rozmyslet, že pro každé celé  $j \geq i + 2$  dává  $a_j$  zbytek 1 po dělení  $m$ , a proto  $m$  nedělí  $a_j$ . Proto  $m$  dělí jen konečně mnoho členů dané posloupnosti.