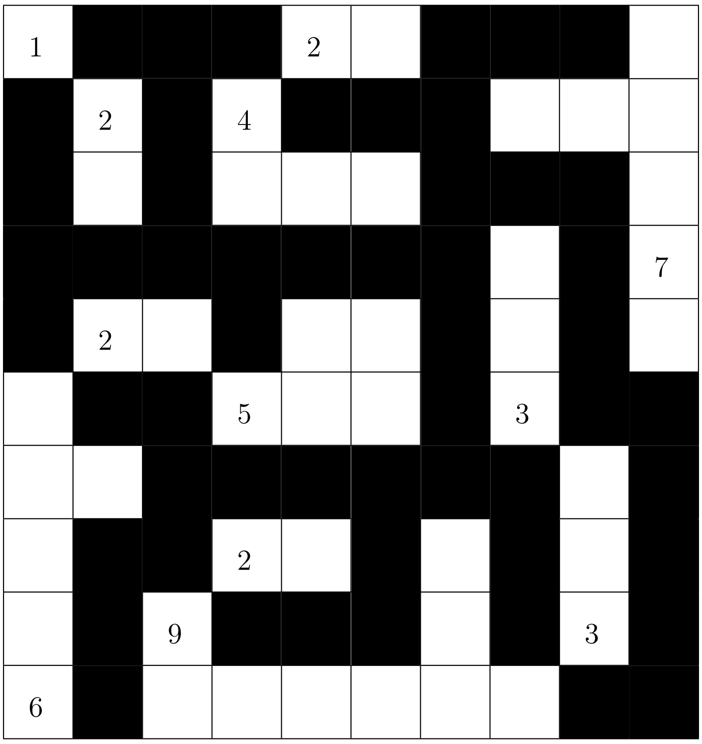
Řešení 4. série

Úloha 1. *Na hrací mřížce 10×10 jsou některá pole označena čísly. Určete, která pole budou bílá (ostrovy) a která černá (voda), aby platilo:*

- *Každé číslo označuje ostrov (bílá pole vzájemně spojená stranou) o přesně tolika bílých polích, včetně políčka s číslem.*
- *Každý ostrov obsahuje právě jedno číslo, ostrovy se nesmí dotýkat stranou (ale rohem ano).*
- *Všechna černá pole (voda) tvoří souvislou oblast dotýkající se stranami.*
- *Nesmí vzniknout žádný čtverec 2×2 černých polí.*

1				2					
	2		4						
									7
	2								
			5				3		
			2						
		9						3	
6									

Řešení:



Úloha 2. *4 ptáčci stojí v řadě. Počet šilinků druhého z nich je aritmetickým průměrem počtu šilinků jeho dvou sousedů. Dále pro třetího z nich platí, že jeho dva sousedé mají dohromady dvojnásobek šilinků, co on sám. Nakonec, poslední ptáček v řadě má tolik šilinků, co všichni ostatní dohromady. Kolik šilinků má první ptáček v řadě?*

Řešení:

Řekněme, že první ptáček v řadě má a šilinků (tento počet se snažíme zjistit), druhý b šilinků, třetí c, čtvrtý d. Víme, že počet šilinků druhého ptáčka je aritmetický průměr počtu šilinků prvního a třetího, tedy

$$\begin{aligned} b &= \frac{a+c}{2} \\ 2 \cdot b &= a + c \\ c &= 2b - a \end{aligned}$$

Dále víme, že druhý a čtvrtý ptáček mají dohromady dvojnásobek šilinků, co třetí ptáček, tedy

$$\begin{aligned} c &= \frac{b+d}{2} \\ 2 \cdot c &= b + d \end{aligned}$$

Dosadíme $c = 2 \cdot b - a$:

$$\begin{aligned} 2 \cdot (2 \cdot b - a) &= b + d \\ 4 \cdot b - 2 \cdot a &= b + d \\ d &= 3 \cdot b - 2 \cdot a \end{aligned}$$

Zároveň víme, že poslední ptáček má tolik šilinků, co první, druhý a třetí dohromady, tedy $d = a + b + c$. Dosadíme $c = 2 \cdot b - a$, $d = 3 \cdot b - 2 \cdot a$:

$$\begin{aligned} 3 \cdot b - 2 \cdot a &= a + b + 2 \cdot b - a \\ 3 \cdot b - 2 \cdot a &= 3 \cdot b \\ -2 \cdot a &= 0 \\ a &= 0 \end{aligned}$$

Zjišťujeme, že první ptáček má 0 šilinků.

Úloha 3. *Píp, Podloudňák a Spáč pracují na poli. Píp udělá celou práci za 3 hodiny. Podloudňák udělá za hodinu polovinu celé práce a ještě tolik, co udělá za stejnou dobu Spáč. Všichni tři dohromady udělají celou práci za 2 hodiny. Jak dlouho by celá práce trvala Spáčovi?*

Řešení:

Při úlohách o společné práci platí, že součet výkonů (výkonem rozumíme část práce, kterou udělají za jednu hodinu) všech tří ptáků je roven výkonu, když pracují dohromady. Označme výkon ptáče x. Potom ze zadání víme, že Píp má výkon $\frac{1}{3}$, Podlouňák $\frac{1}{2} + x$ a výkon všech tří dohromady je $\frac{1}{2}$. Platí tedy:

$$\begin{aligned} \frac{1}{3} + \frac{1}{2} + x + x &= \frac{1}{2} \\ 2 \cdot x &= -\frac{1}{3} \\ 2 \cdot x &= -\frac{1}{6} \end{aligned}$$

Výkon Spáče je záporný, to znamená, že akorát ostatním škodí a vůbec nepracuje, tedy sám by práci neudělal nikdy.

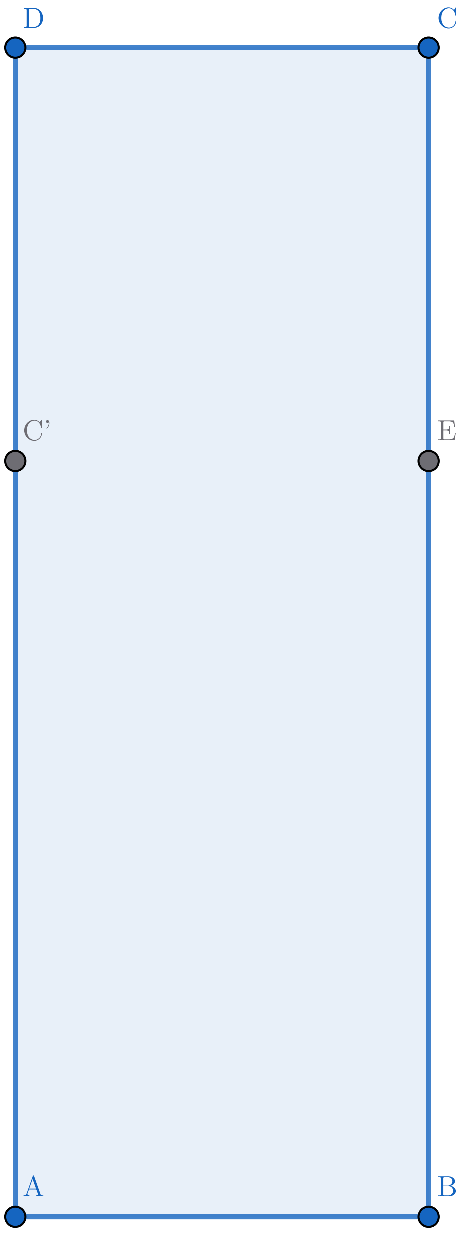
Úloha 4. *Modř má z jedné strany barevný papír o délce stran $a = 21$ cm, $b = \sqrt{2} \cdot a$, s pravými úhly ve všech rozích (čili klasická A4). Má ho před sebou barevnou stranou nahoru na výšku a podle následujícího návodu skládá běžnou vlaštovku:*

1. *Přeloží k sobě delší strany papíru a opět rozloží.*
2. *Přeloží obě horní hrany na osu vytvořenou v kroku 1.*
3. *Hrany vzniklé v kroku 2 (šikmé hrany) přehne na osu z kroku 1 (tak, aby horní hrany z kroku 2 zůstaly na ose z kroku 1).*
4. *Přehne papír po ose z kroku 1 napůl.*
5. *Přehne křídlo tak, že rukojeť vlaštovky má tvar pravoúhlého lichoběžníku s výškou 1 cm (delší základnou je hrana z kroku 1). Tento lichoběžník není svrchu viditelný, je schován uvnitř.*

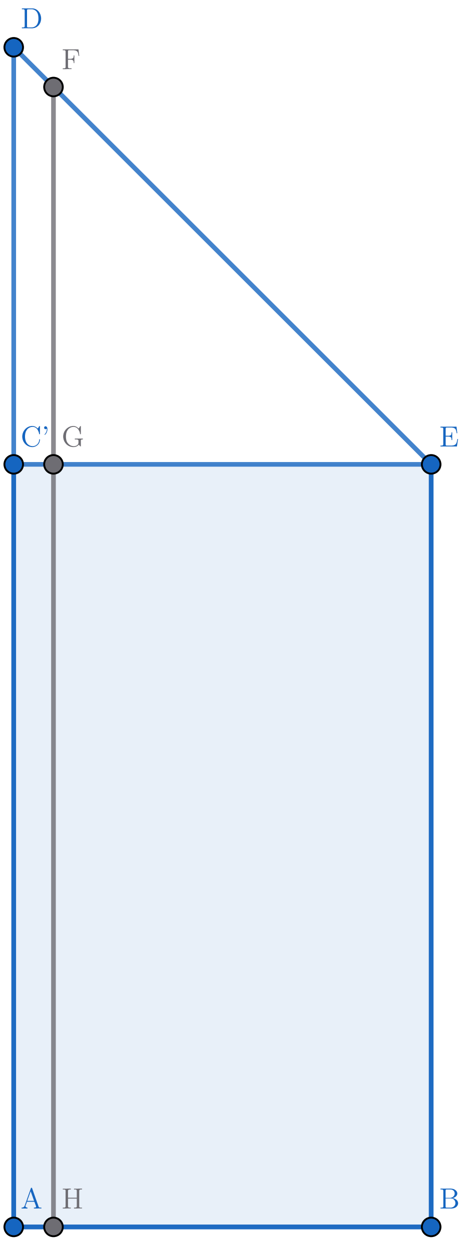
Vypočítejte plochu barvy, která je svrchu vlaštovky vidět. (Zanedbejte nepřesnosti skládání při reálném provedení a tloušťku ohybů.)
Nápověda: pokuste se dokázat co nejvíce shodností pomocí legitimních prostředků (např. vět o shodnostech trojúhelníků), pokud ale nevíte, nebojte se použít „selský rozum“ (např. jsou-li po přehnutí dvě věci přes sebe, jsou shodné).

Řešení:
Budu se zabývat pouze jednou polovinou vlaštovky, druhá polovina je symetrická. Rozevřu vlaštovku do plné šíře („zruším“ rukojeť). Udělám si náčrtky klíčových bodů z postupu, body označené čarou (‘) jsou nové polohy bodů z předchozích obrázků po provedení patřičných úkonů skládání.

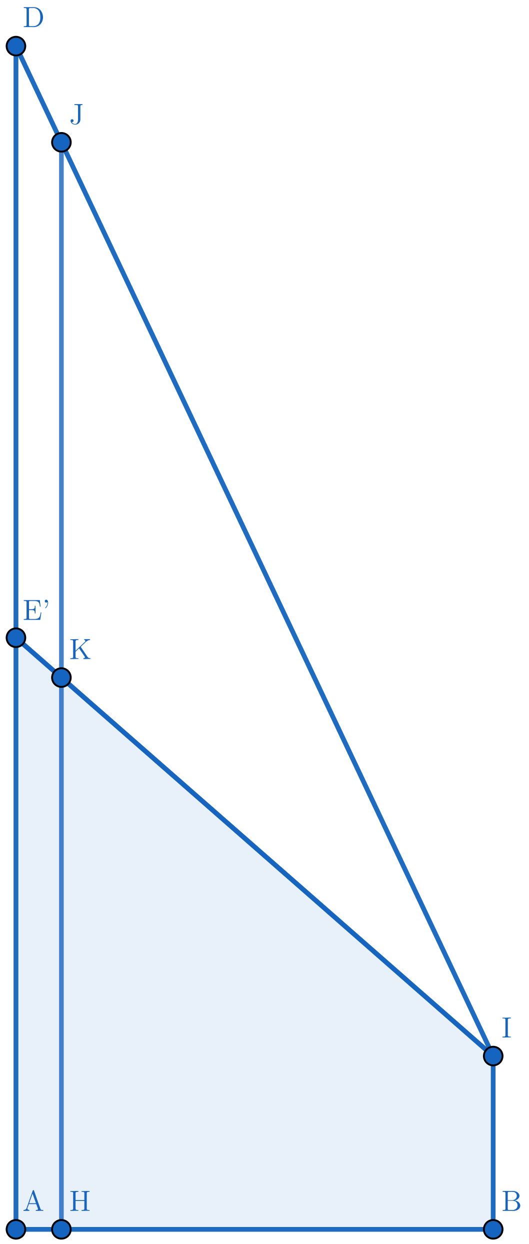
Po kroku 1, šedé body C' a E teprve vzniknou v kroku 2:



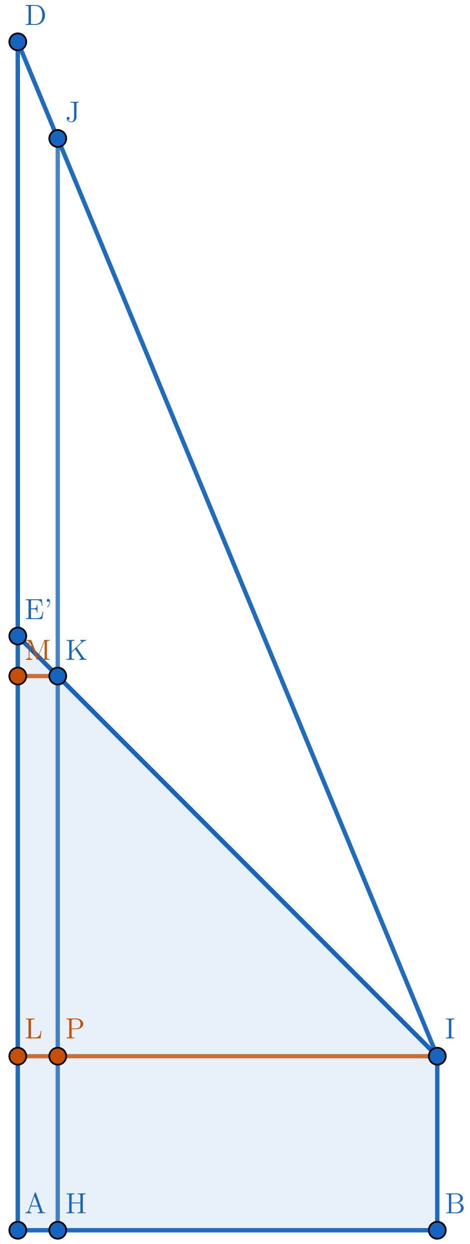
Po kroku 2, šedé body F, G, H a úsečky mezi nimi teprve vzniknou, značí rukojeť:



Po kroku 3, 4, 5 a rozložení do plné šíře (zrušení rukojeti), body J, K, H a úsečky mezi nimi jsou hranou rukojeti (lichoběžník $AHKE'$ je schován v rukojeti, není vidět):



Doplněný o úsečky LI a MK, které budu používat při výpočtech; bod L je patou kolmice na AD procházející bodem I, bod M je patou kolmice na AD procházející bodem K:



Zaměřím se pouze na polovinu vlaštovky, jelikož úloha je symetrická.

Viditelná barevná plocha je určena lichoběžníkem $HBIK$ (lichoběžník $AHKE'$ je schován v rukojeti), jak lze vidět na 4. obrázku. Ten si mohu rozdělit na trojúhelník PIK a obdélník $HBIP$. Abych mohl vypočítat jejich obsah, potřebuji zjistit délky $|PI|$ a $|HP| = |AL| = |AD| - |DE'| - |E'L|$. Začnu tedy postupně od kroku 1 skládání a zaměřím se na tyto délky.

Čísla dosaďme až nakonec, zatím počítejme s zástupnou proměnnou a.

V kroku 1 se mi papír přepůlil, tedy mi vznikly body A, B, jež jsou středy kratších stran. Jeden ze dvou takto vzniklých obdélníků si pojmenuji $ABCD$.

V kroku 2 přeložím bod C na bod C', $C' \in AB$ a vznikne mi bod E, $E \in BC$, $\mathcal{O}_{\overleftrightarrow{DE}}(C) = C'$

($\mathcal{O}$ značí osovou souměrnosti). Délka $|DC|$ se mi překládáním zachová, tedy $|DC'| = |DC|$, a protože D půlí horní hranu papíru, $|DC'| = |DC| = \frac{a}{2}$. Stejně tak se mi zachová pravý úhel $\sphericalangle DCB = \sphericalangle DCE$ ve vrcholu papíru, tedy $|\sphericalangle DC'E| = 90°$. Abychom se vyhnuli argumentaci pomocí symetrie, jejíž koncept může být řešiteli neznámý, můžeme argumentovat pomocí tohoto pravého úhlu. Jelikož víme, že i další dva úhly $\sphericalangle C'AB, \sphericalangle ABE$ v čtyřúhelníku $ABEC'$ jsou pravé, je i poslední úhel $\sphericalangle BEC'$ pravý, tedy $ABEC'$ je obdélník. Z toho vyplývá, že $|C'E| = |AB|$, což je analogicky k $|DC|$ délka $\frac{a}{2}$. Tedy $\triangle DC'E$ je rovnoramenný s rameny DC', EC' a úhlem při hlavním vrcholu $|\sphericalangle DC'E| = 90°$. Z toho vyplývá, že úhly při základně mají velikost $(180° - 90°) \div 2 = 45°$.

V kroku 3 přeložím bod E na bod E', $E' \in AB$ a vznikne mi bod I, $I \in BE$, $\mathcal{O}_{\overleftrightarrow{DI}}(E) = E'$. Opět se mi zachovají délky a úhly. $|DE'| = |DE|$, což mohu z vypočítat pomocí Pythagorovy věty:

$$
\begin{aligned}
|DE|^2 &= |DC'|^2 + |EC'|^2 \\
|DE|^2 &= \left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 \\
|DE|^2 &= 2 \times \frac{a^2}{4} \\
|DE|^2 &= \frac{a^2}{2} \\
|DE| &= \frac{a}{\sqrt{2}}.
\end{aligned}
$$

Nyní po kroku 4 a 5 nám přibyde úsečka HJ, pro kterou ze zadání platí $\overleftrightarrow{AD} \parallel \overleftrightarrow{HJ}, |\overleftrightarrow{AD}\ \overleftrightarrow{HJ}| = 1$ cm.

Přesuňme se na obrázek 4.

Ten je doplněn o body L, P, $L \in AD, \overleftrightarrow{LI} \perp \overleftrightarrow{AD}$ (L je patou kolmice procházející bodem I na přímku $\overleftrightarrow{AD}$), $P \in \overleftrightarrow{HJ} \cap \overleftrightarrow{LI}, (P \in \overleftrightarrow{LI}) \wedge (\overleftrightarrow{HJ} \parallel \overleftrightarrow{AD} \perp \overleftrightarrow{LI}) \Rightarrow \overleftrightarrow{HJ} \perp \overleftrightarrow{PI}$ (P je průsečíkem $\overleftrightarrow{LI}$ a $\overleftrightarrow{HJ}$ a z rovnoběžnosti $\overleftrightarrow{HJ} \parallel \overleftrightarrow{AD}$ vyplývá, že $\overleftrightarrow{PI}$ je kolmé na $\overleftrightarrow{HJ}$). Z výše uvedeného vyplývá, že čtyřúhelníky $ABIL$ a $HBIP$ mají 3 pravé úhly, tedy i čtvrtý úhel při vrcholu I je pravý a jedná se tak o obdélníky.

První vypočťeme obsah $\triangle PIK$. Nejdříve si uvědomíme trojúhelník LIE'. Ten má z výše uvedeného pravý úhel $\sphericalangle E'LI$. Dále dopočítáme $|\sphericalangle LE'I| = 180° - |\sphericalangle DE'I| = 180° - 135° = 45°$ a poslední úhel tedy je $|\sphericalangle LIE'| = 180° - 90° - 45° = 45°$. Tzn., že $\triangle LIE'$ je rovnoramenný s rameny LE', LI. Nyní $\triangle PIK$. Známe velikost dvou úhlů, a to $|\sphericalangle KPL| = 90°$ a $|\sphericalangle PIK| = 45°$ je společný s trojúhelníkem LIE'. Analogicky jako výše bude třetí úhel mít velikost 45°, tedy trojúhelník PIK je rovnoramenný s rameny PI, PK. Protože platí $\overleftrightarrow{AD} \parallel \overleftrightarrow{HJ}, |\overleftrightarrow{AD}\ \overleftrightarrow{HJ}| = 1\ cm$, $L \in \overleftrightarrow{AD}, P \in \overleftrightarrow{HJ}$ a $LP \in LI, \overleftrightarrow{AD} \perp \overleftrightarrow{LI} \perp \overleftrightarrow{HJ}$, pak $|LP| = 1$ cm. (Vzdálenost $\overleftrightarrow{AD}$ a $\overleftrightarrow{HJ}$ je 1 cm, tedy když úsečka LP je na ně kolmá, její délka je taky 1 cm.) Z toho můžeme zjistit délky $|PK| = |PI| = |LI| - |LP| = |AB| - |LP| = \frac{a}{2} - 1$. Obsah $\triangle PIK$ nyní můžeme díky pravému úhlu mezi rameny jednoduše vypočítat jako

$$
S_{PIK} = \frac{|PI| \times |PK|}{2} = \frac{\left(\frac{a}{2} - 1\right)^2}{2}.
$$

Nyní zbývá vypočítat obsah čtyřúhelníku $ABIL$, jenž je z $\overleftrightarrow{LI} \perp \overleftrightarrow{AD}$ evidentně obdélníkem. Délka $|PI|$ je již známá, stačí tedy zjistit délku $|PH|$. Z výše zmíněné rovnoběžnosti a kolmostí vyplývá, že $|PH| = |LA| = |DA| - |DE'| - |E'L|$.

- $|DA|$ je důvěrně známá délka, a to výška papíru $b = \sqrt{2}a$, jelikož $ABCD$ je obdélník.

- $|DE'|$ jsme již vypočítali výše jako $\frac{a}{\sqrt{2}}$.
- $|E'L|$ je ramenem rovnoramenného trojúhelníka LIE', tedy $|LE'| = |LI| = \frac{a}{2}$.

Celkem tedy:

$$\begin{aligned}
|PH| &= \sqrt{2}a - \frac{a}{\sqrt{2}} - \frac{a}{2} \\
&= \frac{2\sqrt{2}a}{2} - \frac{\sqrt{2}a}{2} - \frac{a}{2} \\
&= \frac{2\sqrt{2} - \sqrt{2} - 1}{2}a \\
&= \frac{\sqrt{2} - 1}{2}a,
\end{aligned}$$

a pak obsah je

$$S_{HBIP} = \left(\frac{a}{2} - 1\right) \times \frac{\sqrt{2} - 1}{2}a.$$

Zbývá už jen sečíst obsahy S_{PIK} a S_{HBIP} a vynásobit je 2 (pro celou vlaštovku).

$$\begin{aligned}
S &= 2 \times \left(\frac{\left(\frac{a}{2} - 1\right)^2}{2} + \left(\frac{a}{2} - 1\right) \times \frac{\sqrt{2} - 1}{2}a \right) \\
&= \left(\frac{a}{2} - 1\right)^2 + \left(\frac{a}{2} - 1\right) \times \left(\sqrt{2} - 1\right) a \\
&= \left(\frac{a}{2} - 1\right) \times \left(\left(\frac{a}{2} - 1\right) + \left(\sqrt{2} - 1\right) a \right)
\end{aligned}$$

Teď stačí dosadit za $a = 21$cm.

$$\begin{aligned}
S &= 9,5 \text{ cm} \times \left(9,5 \text{ cm} + \left(\sqrt{2} - 1\right) \times 21 \text{ cm}\right) \\
&\doteq 172,8856 \text{ cm}^2
\end{aligned}$$

Viditelná bervná plocha vlaštovky bude mít obsah přibližně $172,8856 \text{ cm}^2$.

Úloha 5. *Pro prvočísla p a q, $p > q$ platí, že rozdíl druhých mocnin p a q má právě 4 kladné dělitele. Najděte všechny možné dvojice p, q.*

Řešení:

Vzhledem k tomu že p a q jsou prvočísla, tedy i přirozená čísla a $p > q$, pak číslo $p^2 - q^2$ je přirozené. Nyní se zamyslíme nad tím, kdy má přirozené číslo právě 4 kladné dělitele. Každé přirozené číslo má dělitele číslo 1 a také dělitele samo sebe.

Číslo jedna je nejmenší dělitel, a samo číslo je svůj největší dělitel. Číslo které hledáme má ještě 2 kladné dělitele hodnotně mezi nimi. Označíme je x a y, kde $x < y$.

$p^2 - q^2$ rozložíme na $(p - q) \cdot (p + q)$. Přirozené číslo se 4 kladnými děliteli jde napsat jako součin 2 kladných přirozených čísel právě 2 způsoby:

1. činitel samotné číslo a činitel 1
2. činitel x a činitel y

Jelikož p a q jsou přirozená, tak $p - q < p + q$. Proto podle způsobu 1 by muselo $p - q$ být rovno 1. Jediná prvočísla pro které tohle platí jsou 3 a 2, jenomže $3^2 - 2^2 = 5$ a číslo 5 nemá 4 kladné dělitele (jen 2). Proto $x = p - q$, $y = p + q$.

x je určitě prvočíslo, jelikož kdyby bylo číslo složené, pak by existoval menší dělitel jeho, a i našeho hledaného čísla různý od jedničky. y může být buď prvočíslo, nebo druhá mocnina x (jiné složené číslo ne, protože by hledané číslo mělo více než 4 dělitele).

1. Nejprve předpokládejme že řešení platí pro $y = x^2$. Pokud $x = 2$, je y rovno 4 a kvůli $x = p - q$ a $y = p + q$ by p muslo být 3 a $q = 1$, což odporuje zadání, jelikož q má být prvočíslo.

   x je tedy liché, protože to je prvočíslo a není to 2. Aby rozdíl dvou čísel byl lichý, musí být jedno liché a jedno sudé, a když platí $p > q$ a obě jsou prvočísla pak $q = 2$. Jenže pro žádné prvočíslo p neplatí že $(p - 2)^2 = (p + 2)$, proto možnost $x^2 = y$ nevede k žádnému řešení

2. Když jsou x a y různá prvočísla, pak jsou obě lichá, jelikož $p - q$ a $p + q$ mají stejnou paritu, přestože to jsou různá čísla, a existuje jen jedno sudé prvočíslo.

   Aby rozdíl dvou čísel byl lichý, musí být jedno liché a jedno sudé, a když je $p > q$ a obě jsou prvočísla, pak je q rovno 2. Hledáme tedy trojici prvočísel x, p, y kde $p = x + 2$ a $y = x + 4$. V každé takové trojici čísel je jedno dělitelné třemi (pokud x není dělitelné 3, pak dává zbytek buď 1, pak je $x + 2$ dělitelné 3, nebo zbytek 2, pak je $x + 4$ dělitelné 3).

   Hledáme tedy trojici prvočísel, kde je nějaké dělitelné 3. Jediné prvočíslo dělitelné 3 je číslo 3. Jelikož $3 - 2 = 1$, což není prvočíslo, pak je prvočíslo rovné 3 to nejmenší z trojice prvočísel s rozdíly po dvou. Jediná hledaná trojice prvočísel je tedy $x = 3$ $p = 3 + 2 = 5$ $y = 3 + 4 = 7$.

Jediná dvojice prvočísel p a q splňující zadání je tedy 5 a 2.

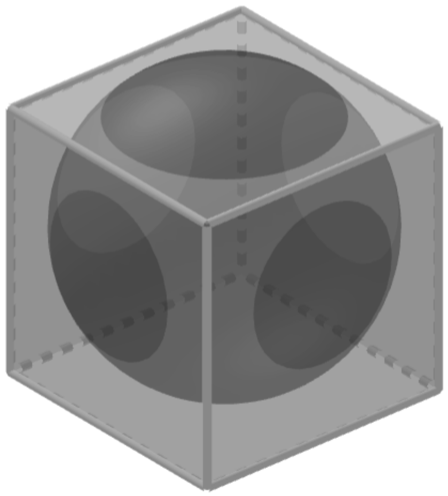
Úloha 6. *Máme krychli se stranou 12 cm a kouli s poloměrem 7 cm, obě tělesa mají střed ve stejném bodě S. Určete, s jakou pravděpodobností bude náhodně vybraný bod z povrchu krychle také součástí (uvnitř) koule.*

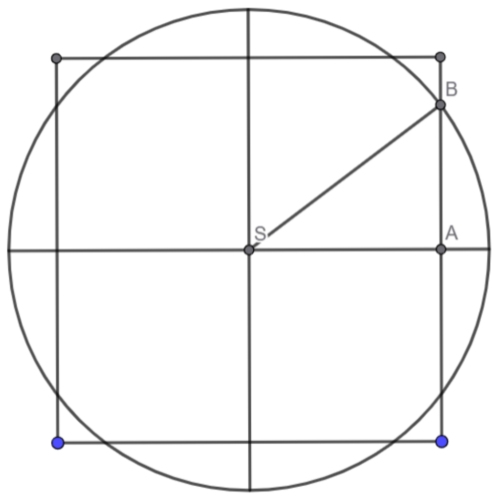
Řešení:

Nejdůležitější zde je si uvědomit, jak takový útvar bude vypadat. Vzhledem k tomu, že:

- Koule má poloměr 7 cm a polovina strany krychle pouze $\frac{12}{2} = 6\,\text{cm}$, tedy uprostřed stěn krychle bude vidět koule.
- V rozích krychle ale bude situace opačná, protože 7 cm (poloměr koule) je menší než $\sqrt{6^2+6^2} \doteq 8{,}485$ (polovina tělesové úhlopříčky krychle) a proto rohy krychle budou vidět.

Útvar a jeho průřez tedy vypadají takto:





Označme střed některé stěny krychle jako A a sousedící průnik povrchů koule a krychle ve stejném průřezu jako B (viz obrázek)

Vidíme, že úsečka AB je poloměrem kruhu, který je na povrchu jak koule, tak krychle. Tuto délku potřebujeme spočítat. $|SA|$ je polovina strany krychle, tedy $\frac{12}{2} = 6\,\text{cm}$. $|SB|$ je poloměr koule, tedy 7 cm. Trojúhelník SAB je pravoúhlý s pravým úhlem u vrcholu A, tedy z Pythágorovy věty dostáváme:

$$\begin{aligned}|SB|^2 &= |SA|^2 + |AB|^2\\ 7^2 &= 6^2 + |AB|^2\\ |AB|^2 &= 7^2 - 6^2 = 49 - 36 = 13\\ |AB| &= \sqrt{13}\,\text{cm}\end{aligned}$$

Obsah kruhu s poloměrem $\sqrt{13}\,\text{cm}$ je $\pi\sqrt{13}^2 = 13\pi\,\text{cm}^2$. Obsah všech šesti těchto kruhů, které se nacházejí na šesti stranách krychle je $6 \cdot 13\pi = 78\pi\,\text{cm}^2$.

Povrch krychle se stranou 12 cm je $6 \cdot 12^2 = 864\,\text{cm}^2$

Nahodně vybraný bod je kdekoliv na povrchu krychle. Součástí koule bude, pokud bude v některém z šesti kruhů. Pravděpodobnost, že se to stane, je tedy obsah těchto kruhů děleno povrchem krychle, což je $\frac{78\pi}{864} = \frac{13\pi}{144} \doteq 0{,}283$, tedy $28{,}3\%$.

Pravděpodobnost, že náhodně vybraný bod na povrchu krychle bude také součástí koule je tedy přibližně $28{,}3\%$.

Úloha 7. *Najděte všechna kladná reálná čísla a, b, c, která mohou být stranami trojúhelníka a která splňují následující nerovnost: $a^2 + ab + bc < c^2$.*

Řešení:

Určitě víme, že pro strany trojúhelníka a, b, c platí:

$$(a + c)(a + b - c) > 0,$$

jelikož z trojúhelníkové nerovnosti platí $a + b > c$, tedy $a + b - c > 0$, a $a + c > 0$, jelikož strany trojúhelníka mají určitě kladnou délku, tedy i $(a + c)(a + b - c) > 0$.

Upravme:

$$\begin{aligned} (a + c)(a + b - c) &> 0 \\ a^2 + ab - ac + ca + cb - c^2 &> 0 \\ a^2 + ab + bc - c^2 &> 0 \\ a^2 + ab + bc &> c^2. \end{aligned}$$

Tím ale dostáváme, že vždy platí nerovnost $a^2 + ab + bc > c^2$, máme však najít všechny případy, kdy platí $a^2 + ab + bc < c^2$, tedy stejná ostrá nerovnost s opačným znaménkem. Evidentně tedy trojúhelník se stranami stejnými jako v zadání nemůže existovat.