Řešení 3. série

Úloha 1. *Najděte všechny dvojice přirozených čísel a, b, pro která platí $a^2 = 2026 + b^2$.*

Řešení:
Upravíme na $a^2 - b^2 = 2026$ a použijme vzorec pro rozdíl druhých mocnin, dostaneme:

$$(a + b) \cdot (a - b) = 2026$$

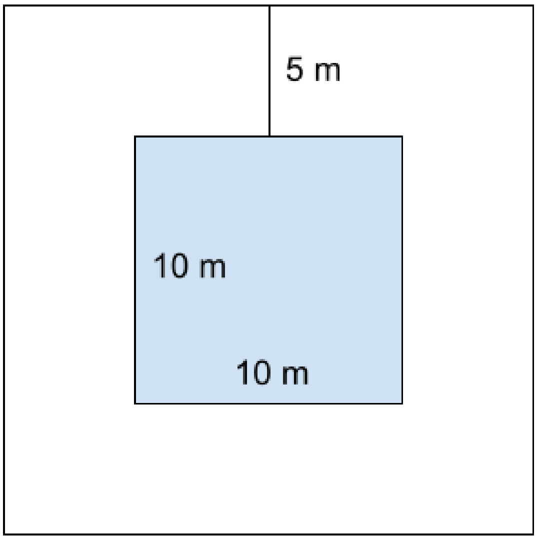
Potřebujeme tedy najít nějaký rozklad na součin čísla 2026. Možnosti jsou:

- $1 \cdot 2026$
- $2 \cdot 1013$
- $1013 \cdot 2$
- $2026 \cdot 1$

Můžeme si všimnout, že vždy je jeden z činitelů sudý a druhý lichý. Čísla $a+b$, $a-b$ mají ovšem stejnou paritu, neboť: $a + b = (a - b) + 2 \cdot b$ (Přičtením sudého čísla se parita nemění.)

Žádná z možností nevyhovuje, proto žádná dvojice splňující podmínky ze zadání neexistuje.

Úloha 2. *Jan husa se šel proběhnout kolem učebny dějepisu o rozměrech* $10 \times 10\,m$. *Vyšel ze dveří, vzdálil se* $5\,m$ *od učebny a uběhl 5 čtvercových okruhů, viz obrázek. Další den se mu motala hlava, takže chtěl uběhnout jen 1 čtvercový okruh, ale tak, aby uběhl stejnou vzdálenost jako den předtím. Kolik metrů se musel vzdálit od učebny druhý den?*



Řešení:
Řešíme v metrech. Strana vnějšího čtverce na obrázku je $10 + 5 + 5 = 20$. Celkem tedy uběhl $5 \cdot 4 \cdot 20 = 400$. Označme vzdálenost od domu druhý den jako d. Velký okruh je potom čtvercem o straně $10 + 2 \cdot d$ a Jan Husa druhý den uběhl $4 \cdot (10 + 2 \cdot d)$. Víme, že první a druhý den uběhl stejně, tedy:

$$\begin{aligned} 4 \cdot (10 + 2 \cdot d) &= 400 \\ 40 + 8 \cdot d &= 400 \\ 8 \cdot d &= 360 \\ d &= 45 \end{aligned}$$

Vidíme, že se Jan Husa druhý den vzdálil $d = 45\,\mathrm{m}$.

Úloha 3. *Vyplňte tabulku. Každé pole musí mít nějakou barvu – žlutou, červenou, zelenou, modrou nebo fialovou. V každém poli bude právě jedno přirozené číslo 1–9. V celé tabulce může být stejné číslo maximálně 3×. Řešení se nemusí zdůvodňovat.*
Víte, že:

- *Součet čísel v jednom řádku může být maximálně 28.*
- *Barvy ve sloupci se nesmí opakovat.*
- *Součet čísel v polích s červenou barvou je roven 43 a tato čísla čtená po sloupcích vytváří palindrom.*
- *Červeně vybarvená plocha je osově souměrná podle sloupce C.*
- *Na modrých polích nemůžou být čísla 3, 4 ani 5.*
- *Ve sloupci D nesmí být žádné číslo menší než 7.*
- *Když sečteme čísla na fialových polích, vyjde nám 20.*
- *Každé žluté políčko má pod nebo nad sebou zelené políčko.*
- *Stejná čísla spolu nesmí sousedit stranou.*
- *Stejné barvy spolu nesmí sousedit stranou.*
- *Součet čísel v jedné diagonále je o jedna menší než součet čísel v druhé diagonále.*
- *Zelená barva nesmí být v 3. a 5. řádku.*
- *Na políčkách B1 a B5 jsou stejná čísla.*
- *Na druhém řádku je více žlutých než zelených políček.*

	A	B	C	D	E
1	2				
2					
3	9		1		
4					
5					2

Řešení:

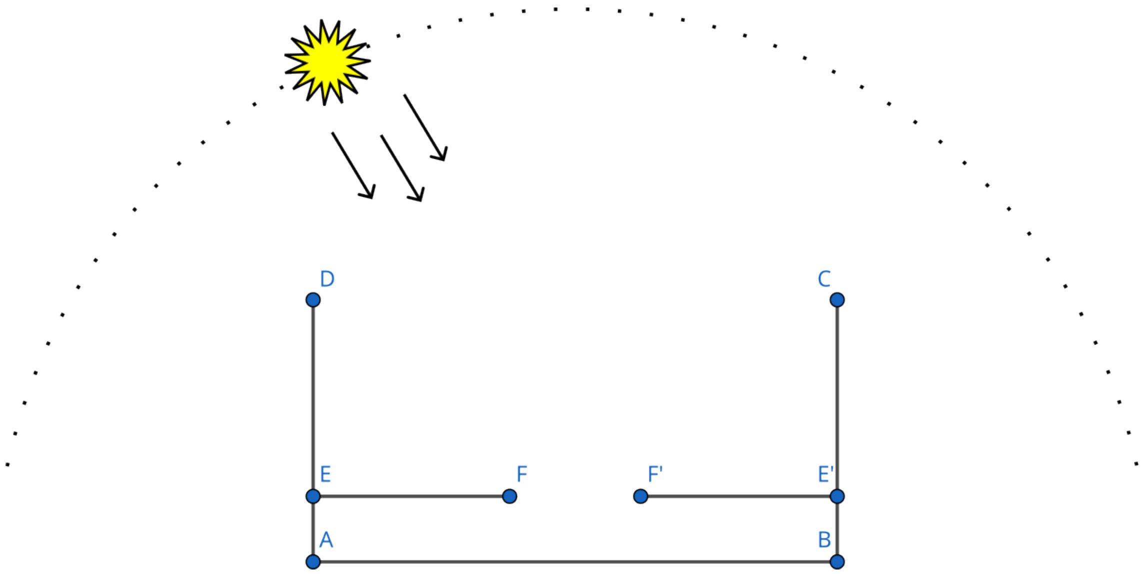
	A	B	C	D	E
1	2	4	5	7	1
2	6	5	6	8	3
3	9	2	1	7	9
4	3	8	3	8	6
5	1	4	9	7	2

Úloha 4. *Mějme čtvercovou nádobu s nekonečně tenkými na dno kolmými stěnami o výšce 4 cm a nekonečně tenkým dnem. Nádoba má ve výšce 1 cm nad dnem přepážku, která je rovnoběžná se dnem a má uprostřed čtvercovou štěrbinu. Šířka nádoby je 8 cm, šířka štěrbiny je 2 cm.*
Pozn. 3D model čtvercové nádoby najdete zde.

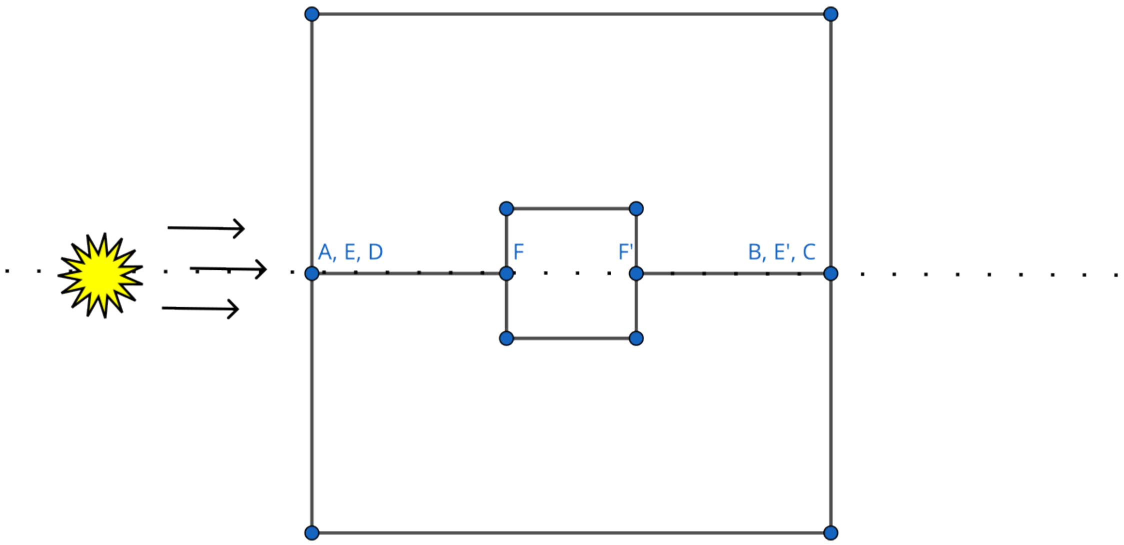
Mějme zdroj světla, jenž je nekonečně daleko a svítí tedy svazkem rovnoběžných paprsků. Zdroj světla krouží kolem krabičky v rovině vymezené středy horní a spodní hrany protilehlých stěn krabice (viz obrázek s body A, B, C, D).

Vymezte plochu dna, jež bude někdy osvícena. Použijte např. kartézskou soustavu souřadnic nebo obrázek doplněný o potřebné vzdálenosti. Nezapomeňte všechna svá tvrzení dokázat.
Pozn. V úloze zanedbejme difrakci (pokud nevíte, o co jde, tak to v této úloze nemusíte řešit).

Pohled na situaci ze strany:



Pohled na situaci svrchu:



Řešení:

Vznikne nám nějaký pás, jehož jeden rozměr bude šířka štěrbiny – 2 cm (ten kolmý k rovině, v níž obíhá světelný zdroj). Druhý rozměr musíme spočítat.

Nejdále se světlo dostane, když bude svítit pod co nejmenším úhlem vůči dnu. To nastává pro úhly bezprostředně větší než ty, jež s dnem svírají přímky CF a DF'.

Abychom zjistili, kam se na dno promítne tato přímka, využijeme podobnosti trojúhelníků. Úloha je symetrická, tedy se budeme zabývat pouze jedním z případů. Označme průsečík přímky CF se dnem (úsečka AB) jako G.

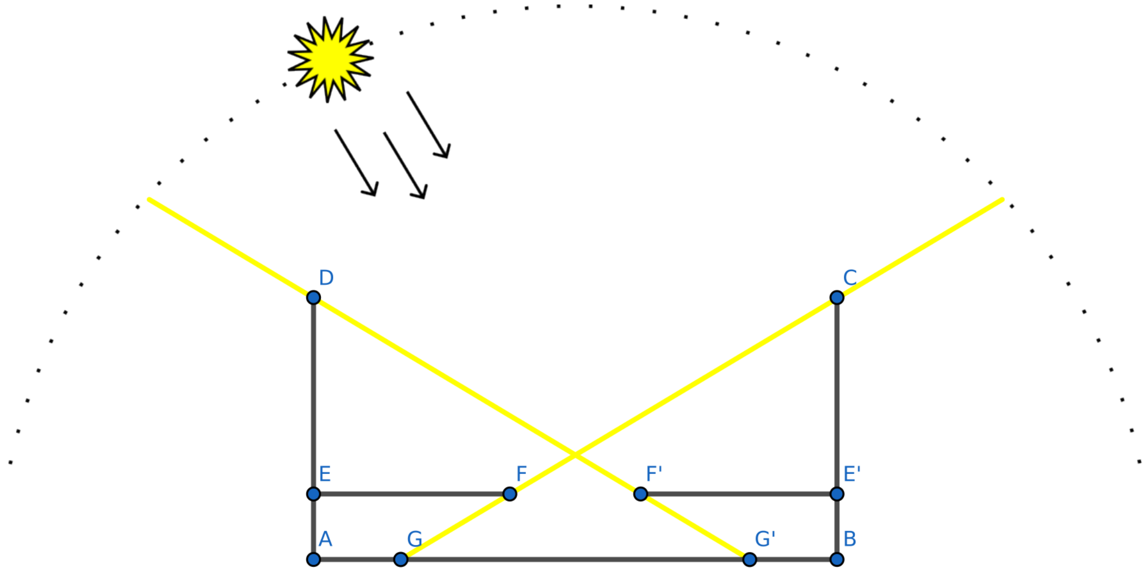
Trojúhelník CGB je podobný s trojúhelníkem CFE' podle věty *uu* (jeden úhel mají společný, další pravý úhel – stěna × dno, stěna × přepážka). Koeficient podobnosti je $\frac{|CB|}{|CE'|} = \frac{4}{3}$. Z toho vyplývá, že $|GB| = |FE'| \cdot \frac{4}{3} = 5 \cdot \frac{4}{3} = \frac{20}{3}$ cm.

Ze symetrie úlohy je zjevné, že pro bod G', který je průsečík DF' s AB, platí $|AG'| = \frac{20}{3}$ cm.

Lze snadno dopočítat, že $|AG| = 8 - \frac{20}{3} = \frac{4}{3}$ cm $= |G'B|$.

Umístím-li nakonec počátek kartézského systému souřadnic, ležícího v rovině dna a majícího stupnici korelující s jednotkou cm, do bodu A s osou x na přímce AB, kde x je kladné na polopřímce $\overrightarrow{AB}$, pak plocha, kam dopadne světlo, má souřadnici x v intervalu $\left(\frac{4}{3}, \frac{20}{3}\right)$ a souřadnici y v intervalu $(-1, 1)$.

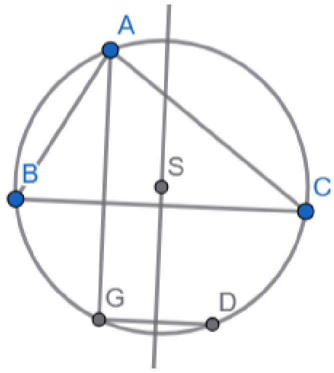
Jinými slovy, bude osvícen obdélník o rozměrech $\frac{16}{3}$ cm × 2 cm.



Úloha 5. *Nechť má trojúhelník ABC kružnici opsanou k a body D, E, F na ní jsou takové, že úsečky AD, BE, CF jsou průměry kružnice k. Nakonec nechť G, H, I jsou obrazy bodů D, E, F v osové souměrnosti postupně podle os stran BC, AC, AB. Dokažte, že se úsečky AG, BH a CI protínají v jednom bodě.*

Řešení:

Dokažme nejprve, že úsečka AG je kolmá na úsečku BC.



Na ose strany BC, nazvěme ji o, musí ležet střed S kružnice k. Protože jsou body G a D osově sdružené podle o, máme $|GS| = |DS|$, a proto bod G leží na kružnici k.

Ze zadání platí $|\sphericalangle o\overleftrightarrow{BC}| = 90^\circ = |\sphericalangle o\overleftrightarrow{GD}|$. Dále je kružnice k Thaletovou kružnicí nad poloměrem AD, tudíž $|\sphericalangle AGD| = 90^\circ|$. Z čtyřúhelníku vymezeného úsečkami GD, AG, BC a osou o pak dostáváme, že i úsečka AG je kolmá na úsečku BC.

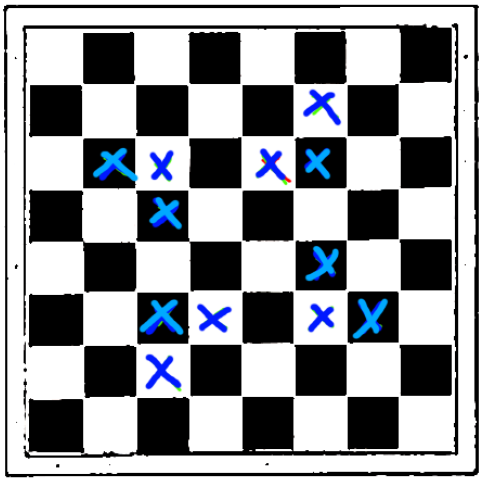
Analogicky můžeme dokázat, že úsečka BH je kolmá na úsečku AC a že úsečka CI je kolmá na úsečku AB.

Proto se úsečky AG, BH a CI protínají v průsečíku výšek trojúhelníku ABC.

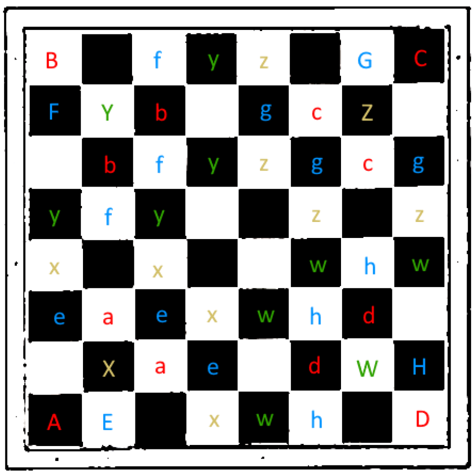
Úloha 6. *Píp dostal informaci, že se Čirik pokusí ukrýt ve formě šachového krále na šachovnici 8×8. Píp má k dispozici neomezený počet šachových koní, ale pouze koní, a jeho cílem je jich využít co nejmíň. Pravidla jsou takto: Píp umístí své šachové koně na prázdnou šachovnici 8×8, Čirik potom zkusí ukrýt na nějaké prázdné pole svého krále tak, aby na něj neútočil žádný kůň. Pokud se mu to povede, vyhrává, jinak vyhrává Píp. Kolik nejméně koní je potřeba na to, aby si Píp mohl zajistit úspěch? (tj. kolik nejméně koní potřebuje Píp a jak je musí rozmístit, aby nebylo žádné prázdné pole, na které neútočí žádný kůň?)*

Řešení:

Je potřeba minimálně 12 koňů, které může rozmístit například takto:



Nyní musíme dokázat, že méně koňů nám nestačí. To můžeme udělat třeba tak, že najdeme 12 políček, pro která platí, že libovolně umístěný kůň útočí na maximálně jedno z nich. Potom na pokrytí celé šachovnice je potřeba minimálně 12 koňů, z nichž každý útočí na jedno z těchto políček.



Na tomto obrázku jsou vybraná políčka oznacena A, B, C, D, E, F, G, H, W, X, Y, Z (barvy jsou pouze pro přehlednost). Všechna pole, odkud by položený kůň videl na políčko „A“, jsou označeny „a“, obdobně odkud lze vidět na „B“, je napsáno „b“, atd. Jak jde vidět, nejde umístit žádného koně tak, aby kryl několik z vybraných políček najednou (žádné z nich není označeno dvěma malými písmeny). Tudíž je potřeba na pokrytí těchto 12 políček alespoň 12 koňů, a tedy je potřeba minimálně 12 koňů na pokrytí celé šachovnice.

Úloha 7. *Nechť a je nenulové celé číslo. Dokažte, že čísla* $a^{2026} + 3$, $a^{2026} + 5$ *nikdy nemůžou být zároveň prvočísla.*

Řešení:

Dokažme, že $a^{2026} + 3$ nebo $a^{2026} + 5$ je vždy dělitelné třemi. Víme, že jedno z třech po sobě jdoucích čísel musí být dělitelné třemi, tedy jedno z čísel $a^{1013} - 1$, a^{1013}, $a^{1013} + 1$ bude dělitelné třemi. Poté určitě jedno z čísel $(a^{1013} - 1) \cdot (a^{1013} + 1)$, $a^{1013} \cdot a^{1013}$, tedy $a^{2026} - 1$, a^{2026} bude dělitelné třemi, jelikož v těchto dvou číslech jsou dohromady násobky všech 3 po sobě jdoucích čísel. Je-li $a^{2026} - 1$ dělitelné třemi, pak $(a^{2026} - 1) + 6 = a^{2026} + 5$ je také dělitelné třemi (jelikož jsme k tomu přičetli 6, tedy násobek trojky). Podobně je-li a^{2026} dělitelné třemi, pak $a^{2026} + 3$ je dělitelné třemi. Tedy určitě jedno z čísel $a^{2026} + 3$, $a^{2026} + 5$ je dělitelné třemi, zároveň a je nenulové, tedy a^{2026} je nenulové, tedy ani jedno z čísel není 3, určitě tedy tato čísla nemohou být zároveň prvočísla.