

Řešení 2. série

Úloha 1. *Rerer a Ferer hrají hru. Rerer řekne libovolné přirozené číslo menší nebo rovno 10. Ferer přičte k tomuto číslu další přirozené číslo od 1 do 10 a oznámí součet. Rerer opět přičte libovolné přirozené číslo, ne větší než 10, a oznámí výsledek. Takto pokračují, dokud je součet menší než 100. Vyhrává ten, kdo první dosáhne trojčíferného čísla. Má někdo výherní strategii? Pokud ano, jakou?*

Pozn.: Výherní strategii je myšleno, že dovede vždycky vyhrát, nehledě na tahy protivníka.

Řešení:

Výherní strategii má první hráč.

Na začátku řekne 1. Potom po každém tahu soupeře (který přičte nějaké číslo m z rozsahu 1 až 10) první hráč přičte $11 - m$. Tím zajistí, že výsledný součet po jeho tahu bude vždy jedno z čísel posloupnosti: 1, 12, 23, 34, 45, 56, 67, 78, 89, 100. Rozdíl mezi těmito čísly je vždy 11. Proto se soupeř nikdy nemůže dostat na „koncové“ číslo dříve, než první hráč, který nakonec řekne 100 a vyhraje.

Úloha 2. *Paní učitelka chová páry magických králíků. Takový magický králík je první měsíc svého života mládětem, poté se z něj stane dospělý (magičtí králíci jsou nesmrtelní). Žije po párech a každý měsíc, kdy je pár dospělý, porodí další pár magických králíků (magičtí králíci se neřídí běžnými zákony genetiky, takže jim nevadí křížení s příbuznými). Paní učitelka měla první měsíc jeden pár mláďat. Druhý měsíc tedy měla jeden pár dospělých, třetí jeden pár mláďat a jeden pár dospělých, čtvrtý jeden pár mláďat a dva páry dospělých, pátý dva páry mláďat a tři páry dospělých. . .*

Pan školník si všiml, že počet párů každý měsíc tvoří Fibonacciho posloupnost (posloupnost čísel začínající 1, 1, 2, 3, 5, kde každý další člen je součet předchozích dvou členů). Zdůvodněte, proč tomu tak je.

Dále navrhněte jiný magický druh, jehož počty každý měsíc tvoří Jacobsthalovu posloupnost (posloupnost čísel začínající 1, 1, 3, 5, 11, kde každý další člen je součet minulého členu a dvojnásobku předminulého členu).

Řešení:

Vidíme, že na začátku se počty párů králíků s Fibonacciho posloupností shodují. Stačí nám tedy dokázat, že platí zadaná rekurence, tedy že počet párů každý další měsíc je součtem počtů předchozích dvou měsíců. Řekněme, že některý měsíc je x mláďat a y dospělých králíků. Další měsíc bude y mláďat a $x + y$ dospělých, další $x + y$ mláďat a $x + 2y$ dospělých. Celkový počet králíků v jednotlivých měsících je postupně $x + y$, $x + 2y$, $2x + 3y$. Vidíme, že první dvě čísla opravdu dávají v součtu třetí číslo.

Druh, který bude tvořit Jacobsthalovu posloupnost (řekněme magičtí zajíci) bude velmi podobný magickým králíkům, akorát dospělý pár každý měsíc porodí dva nové páry (místo jednoho). Opět začneme s jedním párem mláďat, ze kterého se další měsíc stane jeden pár dospělých. Začátek posloupnosti vidíme, že odpovídá, zbývá ukázat rekurenci, tedy to, co už jsme dokazovali u magických králíků a Fibonacciho posloupnosti. Řekněme, že některý měsíc je x mláďat a y dospělých králíků. Další měsíc bude $2y$ mláďat a $x + y$ dospělých, další $2x + 2y$ mláďat a $x + 3y$ dospělých. Celkový počet králíků v jednotlivých měsících je postupně $x + y$, $x + 3y$, $3x + 5y$. Vidíme, že součet dvojnásobku prvního čísla s druhým číslem je opravdu třetí číslo.

Úloha 3. Určete všechny možnosti celých čísel a, b, c takových, aby platila rovnost

$$a^2 + bc = abc.$$

Řešení:

Upravme výraz:

$$\begin{aligned} a^2 &= abc - bc \\ a^2 &= bc(a - 1) \\ bc &= \frac{a^2}{a - 1} \end{aligned}$$

Tedy víme, že $\frac{a^2}{a - 1}$ se musí rovnat celému číslu. Zároveň víme, že dvě po sobě jdoucí čísla jsou vždy nesoudělná, tedy i $a, a - 1$ jsou nesoudělná. Z toho plyne, že i $a^2, a - 1$ jsou nesoudělná, jelikož $a^2 = a \cdot a$, kde obě a jsou nesoudělná s $a - 1$.

Tedy $a - 1$ se musí rovnat něčemu z $\{-1, 1\}$ (nule se rovnat nemůže, jelikož jmenovatel nemůže být nulový), rovnalo-li by se to totiž nějakému jinému celému číslu, pak kvůli nesoudělnosti s a^2 nemůže $\frac{a^2}{a - 1}$ dát celé číslo.

Jsou tedy dvě možnosti:

$$1. \ a - 1 = -1 \Rightarrow a = 0, \frac{a^2}{a - 1} = 0 = bc, \text{ tedy zde jsou dvě možná řešení:}$$

$$a = 0, b = 0, c \in \mathbb{Z} \quad \text{nebo} \quad a = 0, b \in \mathbb{Z}, c = 0.$$

$$2. \ a - 1 = 1 \Rightarrow a = 2, \text{ tedy}$$

$$\frac{a^2}{a - 1} = \frac{2^2}{2 - 1} = 4 = bc,$$

což nám dá dalších 6 možností:

$$a = 2, b = 1, c = 4;$$

$$a = 2, b = 2, c = 2;$$

$$a = 2, b = 4, c = 1;$$

$$a = 2, b = -1, c = -4;$$

$$a = 2, b = -2, c = -2;$$

$$a = 2, b = -4, c = -1.$$

Dohromady máme tedy tato řešení:

$$a = 0, b = 0, c \in \mathbb{Z};$$

$$a = 0, b \in \mathbb{Z}, c = 0;$$

$$a = 2, b = 1, c = 4;$$

$$a = 2, b = 2, c = 2;$$

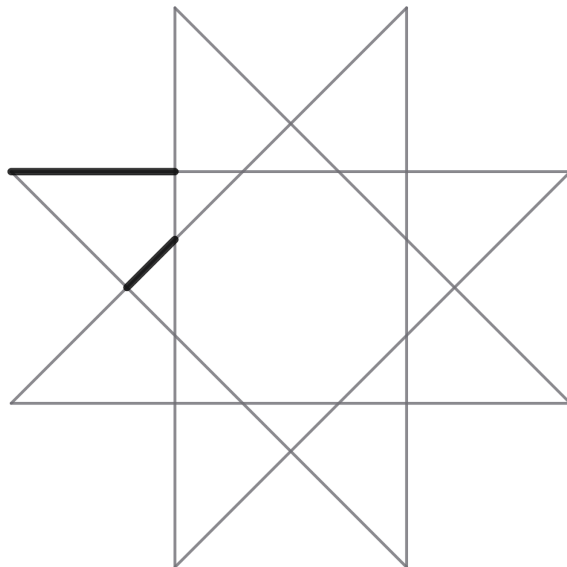
$$a = 2, b = 4, c = 1;$$

$$a = 2, b = -1, c = -4;$$

$$a = 2, b = -2, c = -2;$$

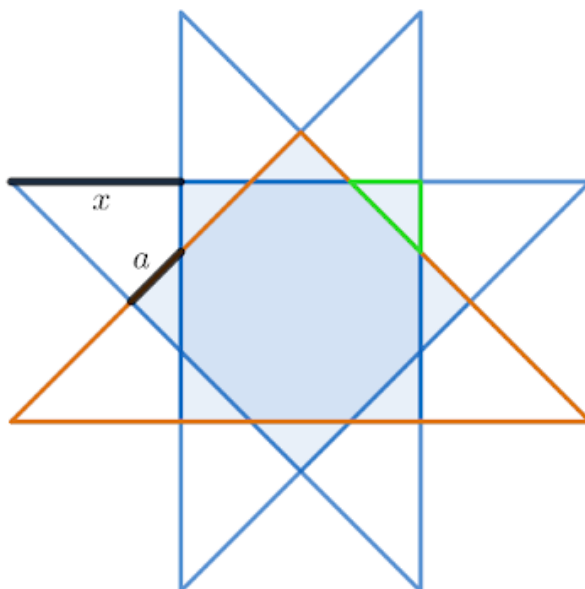
$$a = 2, b = -4, c = -1.$$

Úloha 4. Jsou dány dva shodné čtverce, oba se středem ve stejném bodě. Jeden ze čtverců je oproti druhému otočený o 45° . Spojením těchto čtverců získáme malý oktagram (osmicípou hvězdu). Když prodloužíme strany čtverců, přímky se protnou ve vrcholech velkého oktagramu. Spočítejte poměr stran malého ku velkému oktagramu.



Řešení:

Stranu malého oktagramu si označím jako a . Stranu velkého oktagramu si označím jako x . Délku x se pokusím vyjádřit pomocí délky a .



Oktagram je pravidelná osmicípá hvězda, všechny strany mají stejnou délku a všechny úhly mají stejnou velikost.

V obrazci vznikl velký trojúhelník (stačí zkoumat jeden, protože je obrazec pravidelný) tvořený prodlouženými stranami čtverce (prodloužené pouze na jednu stranu) a úsečkou mezi vrcholy

hvězdy, mezi kterými jsou ještě další dva vrcholy hvězdy (oranžový). Úhel mezi prodlouženými stranami čtverce je pravý, protože je to úhel ve čtverci. Prodloužené strany jsou stejně dlouhé (je to pravidelný útvar).

Velký trojúhelník je pravoúhlý rovnoramenný.

Malý trojúhelník jsou cípy malého oktagramu, jsou to dvě strany malého oktagramu a strana pravidelného osmiúhelníku (zelený). Mezi stranami malého oktagramu je pravý úhel, protože to jsou části stran čtverce. Strany malého oktagramu jsou stejně dlouhé.

Malý trojúhelník je pravoúhlý rovnoramenný.

Spočítáme délku přepony v pravoúhlém rovnoramenném trojúhelníku s ramenem o délce 1 pomocí Pythagorovy věty:

$$\begin{aligned}1^2 + 1^2 &= c^2 \\2 &= c^2 \\c &= \sqrt{2}\end{aligned}$$

Vypočítáme x z rovnice vytvořené pomocí Pythagorovy věty ve velkém trojúhelníku. Rameno velkého trojúhelníku je tvořeno stranou velkého oktagramu (x), dvěma stranami malého oktagramu ($2a$) a přeponou malého trojúhelníku ($\sqrt{2}a$). Přepona velkého trojúhelníku je tvořena dvěma stranami velkého oktagramu ($2x$), dvěma stranami malého oktagramu ($2a$) a přeponou malého trojúhelníku ($\sqrt{2}a$).

$$\begin{aligned}(x + (2 + \sqrt{2})a)^2 + (x + (2 + \sqrt{2})a)^2 &= (2x + (2 + \sqrt{2})a)^2 \\2(x + (2 + \sqrt{2})a)^2 &= (2x + (2 + \sqrt{2})a)^2 \\2(x^2 + 2(2 + \sqrt{2})xa + (2 + \sqrt{2})^2a^2) &= 4x^2 + 4(2 + \sqrt{2})xa + (2 + \sqrt{2})^2a^2 \\2(x^2 + 2(2 + \sqrt{2})xa) - (4x^2 + 4(2 + \sqrt{2})xa) &= (2 + \sqrt{2})^2a^2 - 2(2 + \sqrt{2})^2a^2 \\-2x^2 &= -(2 + \sqrt{2})^2a^2 \\2x^2 &= (2 + \sqrt{2})^2a^2 \\2x^2 &= 4a^2 + 4\sqrt{2}a^2 + 2a^2 \\x^2 &= 3a^2 + 2\sqrt{2}a^2 \\x^2 &= (3 + 2\sqrt{2})a^2 \\x &= \pm a\sqrt{3 + 2\sqrt{2}} \\x &= \pm a\sqrt{(1 + \sqrt{2})^2} \\x &= \pm(1 + \sqrt{2})a\end{aligned}$$

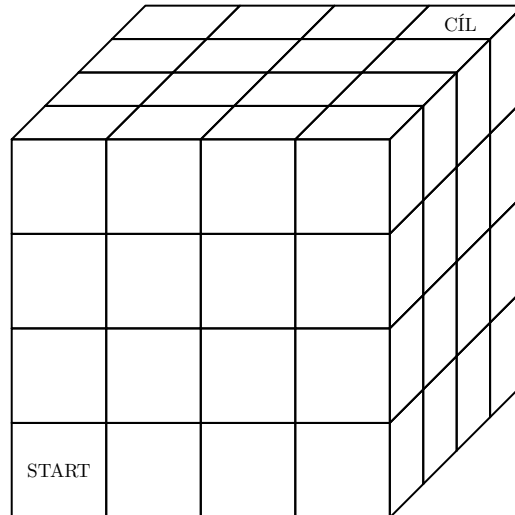
x je délka strany, takže to musí být kladné číslo. x je rovno násobku buď kladné, nebo záporné závorky a čísla a . a je délka strany, takže to bude kladné číslo; aby x bylo kladné, musí závorka být kladná (součin dvou kladných čísel je kladný, součin záporného a kladného čísla je záporný).

$$x = (1 + \sqrt{2})a$$

Poměr stran malého ku velkému oktagramu je:

$$\begin{aligned}a : x \\1 : (1 + \sqrt{2}) \\1 : 2,4142\end{aligned}$$

Úloha 5. Banka má tvar krychle $4 \times 4 \times 4$ (skládá se tedy z 64 menších kostiček). Zloděj začíná v kostičce vpředu vlevo dole a snaží se dostat do kostičky vzadu vpravo nahoře. Pohybovat se může mezi kostičkami se společnou stěnou a pouze směry dozadu, doprava a nahoru (nemůže se tedy vrátet). Kolika různými způsoby se tam může dostat?



Řešení:

Do každé krychličky zapíšeme, kolika způsoby se lze do ní dostat. Tam kde začínáme to bude logicky 1, pak v každé další součet čísel v kostičkách, které s danou kostičkou sdílí hranou a jsou ve směru, že se z nich do dané kostičky můžeme přesunout. Pro přehlednost rozřežu krychli do pater.

První patro:

1	4	10	20
1	3	6	10
1	2	3	4
1	1	1	1

Druhé patro:

10	60	210	560
6	30	90	210
3	12	30	60
1	3	6	10

Třetí patro:

4	20	60	140
3	12	30	60
2	6	12	20
1	2	3	4

Čtvrté patro:

20	140	560	1680
10	60	210	560
4	20	60	140
1	4	10	20

Po vyplnění všech políček jsme zjistili, že v cílovém políčku je číslo 1680, tedy máme 1680 možností.

Úloha 6. Pro jaké číslo v desítkové soustavě platí, že po převedení do devítkové soustavy má tvar \overline{aab} a po převedení do sedmičkové soustavy má tvar \overline{cbc} , kde a, b, c jsou nenulové číslice?

Pozn.: Značení \overline{xyz} znamená, že číslo zapsané v nějaké číselné soustavě se skládá z cifer x, y, z . Tedy například, pokud má číslo v devítkové soustavě tvar \overline{aab} , má v desítkové hodnotu $9^2 \cdot a + 9 \cdot a + b$.

Řešení:

Ze zadání a znalosti soustav čísel platí rovnost $81 \cdot a + 9 \cdot a + b = 49 \cdot c + 7 \cdot b + c$, tedy $90 \cdot a - 50 \cdot c = 6 \cdot b$. Jelikož a, b, c jsou nenulové číslice, tak jsou i přirozená čísla, můžeme tedy uvážit že když je levá strana dělitelná pěti, pak je i pravá, 6 je nesoudělné s 5, takže číslice b je dělitelná 5, ale není nula, tedy je 5.

Když rovnici upravíme jinak, $90 \cdot a - 6 \cdot b = 50 \cdot c$ pak je levá strana dělitelná 3, tedy i pravá, 50 je nesoudělné s 3, takže je c dělitelné třemi. Pro c máme tedy dvě možnosti, 3 a 6 (kdyby bylo větší, není to číslice v sedmičkové soustavě).

Vyzkoušením 2 možností najdeme jedinou, pro kterou platí zadání:

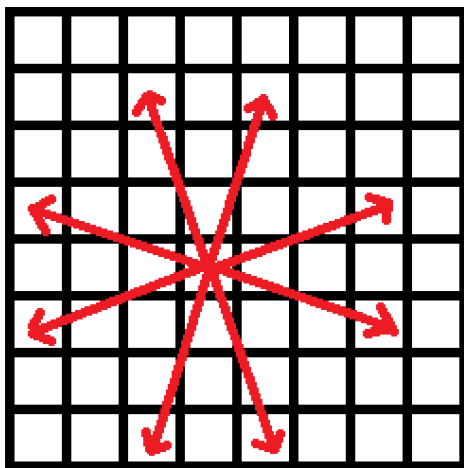
1. $c = 3$: \overline{cbc} v sedmičkové soustavě je $353 = 3 \cdot 49 + 5 \cdot 7 + 3 = 185$

2. $c = 6$: \overline{cbc} v sedmičkové soustavě je $656 = 6 \cdot 49 + 5 \cdot 7 + 6 = 335$

335 v devítkové soustavě je 412, což není tvaru \overline{aab} a odporuje to $b = 5$, oproti tomu 185 je v devítkové soustavě 225, což odpovídá zadání.

Jediné správné řešení je tedy 185.

Úloha 7. Podlouňák stojí na šachovnici 8×8 a pohybuje se dvěma různými tahy, které za sebou střídá. Při prvním se jen posune na políčko napravo nebo nalevo od něj. Při druhém poskočí podobně jako šachový jezdec, ale místo posunu „o 2 políčka a 1 políčko“ se posune „o 3 políčka a 1 políčko“ stejným způsobem:



Při třetím by se zase posunul doleva nebo doprava a tak dále.

Před prvním tahem stál Podlouňák na políčku v levém dolním rohu šachovnice a po k tazích se dostal na políčko v jejím pravém horním rohu. Jaký zbytek dává k po dělení čtyřmi?

Řešení:

Očíslujeme políčka šachovnice jako na následujícím obrázku:

3	4	3	4	3	4	3	4
1	2	1	2	1	2	1	2
3	4	3	4	3	4	3	4
1	2	1	2	1	2	1	2
3	4	3	4	3	4	3	4
1	2	1	2	1	2	1	2
3	4	3	4	3	4	3	4
1	2	1	2	1	2	1	2

Při prvním tahu se z políčka s číslem 1 posune napravo na políčko číslo 2. Dále musí skočit na jedno z políček s číslem 3, po dalším tahu se musí posunout na políčko s číslem 4 a po dalším tahu musí nutně skončit na políčku s číslem jedna. Pak se ale bude zase dít úplně to stejné.

Proto musí Podlouňák pořád dokola střídat políčka s čísly 1, 2, 3, 4, 1, 2, 3, 4, 1, ...

Pokud se po k tazích dostal do pravého horního políčka s číslem 4, musí tedy nutně dávat k zbytek 3 po dělení čtyřmi.