Řešení 1. série

Úloha 1. *Toto je mapa ptačích hnízd. Doplňte do každého políčka počet ptáčků tak, aby se v každém řádku i sloupci vyskytovalo každé z čísel 1–6 právě jednou a platily v tabulce zaznačené nerovnosti mezi čísly. U této úlohy není potřeba uvádět postup řešení.*

3					$<$					
				$\vee$						
		3								
		$\vee$						$\wedge$		$\wedge$
									$<$	
						6			$<$	
$\wedge$		$\vee$								
								5		
		1								

Řešení:

3		6		4	$<$	5		1		2
				$\vee$						
6		**3**		1		4		2		5
		$\vee$						$\wedge$		$\wedge$
5		2		3		1		4	$<$	6
1		5		2		**6**		3	$<$	4
$\wedge$		$\vee$								
2		4		6		3		**5**		1
4		**1**		5		2		6		3

Úloha 2. *V hnízdě je na kružnici rovnoměrně rozmístěno $4n + 2$ vajec (tedy počet dělitelný 2, ale ne 4). Zloději Strakáž a Pakáž hrají hru, kdy střídavě odebírají po dvou vejcích z hnízda jedním z následujících způsobů:*

- *Odeberou 2 sousední vejce (vejce, mezi kterými na začátku ležel nenulový počet vajec, které ale byly odebrány, se pořád nepovažují za sousední).*
- *Odeberou 2 vejce, které jsou přesně naproti sobě (přímka, která je spojuje, prochází středem kružnice).*

Ten, který nemůže brát, prohrává. Začíná Strakáž. Ukažte, že Strakáž má výherní strategii, tedy že dovede vždy vyhrát, nehledě na to, jak hraje Pakáž.

Řešení:
Strakáž začne tím, že odebere dvě vejce naproti sobě. Tím kružnici rozdělí na dvě poloviny, z nichž každá obsahuje $2n$ vajec (tedy sudý počet). Zbytek hry bude odebírat vejce tak, aby po jeho tahu vždy zůstaly platné následující podmínky (po Strakážově prvním tahu obě platí):

1. Pokud je nějaké vejce odebráno, je odebráno i vejce přesně naproti němu.
2. V každé půlce zbývá stejný počet vajec a tento počet je sudý (na začátku $2n$)

Ukažme, že za těchto podmínek může Strakáž vždy hrát tak, aby podmínky zůstaly zachované:

- Pokud Pakáž odebere 2 sousední vejce, odebere Strakáž dvě vejce přesně naproti nim. Z první podmínky plyne, že žádné z těchto vajec nebylo už odebráno, takže to může udělat, zároveň tato podmínka zjevně zůstane zachována. Mince naproti sobě jsou v různých půlkách, takže počet vajec v každé z půlek se snížil o 2, tedy zůstal sudý.
- Pokud Pakáž odebere 2 vejce naproti sobě, zbyde v obou půlkách lichý počet vajec, tedy vždy aspoň 1 vejce. Strakáž si může takové vejce vybrat a odebrat ho a protější vejce (z první podmínky plyne, že ta také ještě nebyla odebrána). Odebíral vejce naproti sobě, takže první podmínka určitě pořád platí. Odebral 2 vejce z každé půlky, takže druhá podmínka také zůstala zachována.

Pokud bude Strakáž hrát podle této strategie, nemůže hra skončit tím, že by Strakáž nemohl táhnout. Potom hra musí skončit tím, že Pakáž nemůže táhnout, a tedy jeho prohrou. Strakáž má proto opravdu výherní strategii.

Úloha 3. *Hledáme dvě nesoudělná přirozená čísla, jejichž součet je roven 100. Kolik takových dvojic čísel existuje?*

Řešení:

Pokud sčítáme dvě čísla, jeden sčítanec je dělitelný nějakým číslem k a druhý není, výsledný součet nemůže být k dělitelný. Proto, pokud je jeden ze sčítanců i součet dělitelný nějakým číslem k, druhý sčítanec musí být tímto číslem k také dělitelný.

100 je dělitelné prvočísly 2 a 5, takže hledaná čísla nemůžou být dělitelná 2 ani 5 (kdyby bylo jedno, bylo by i druhé, tedy by byla soudělná). Ostatní dělitele 100 zkoumat nemusíme, budou vždy dělitelné některým z těchto prvočísel (až na 1).

Vypíšeme zbývající čísla: *1, 3, 7, 9, 11, 13, 17, 19, 21, 23, 27, 29, 31, 33, 37, 39, 41, 43, 47, 49, 51, 53, 57, 59, 61, 63, 67, 69, 71, 73, 77, 79, 81, 83, 87, 89, 91, 93, 97, 99.*

Zůstalo nám 40 čísel, které se popárují do 20 dvojic, ve kterých jsou čísla nesoudělná a mají součet 100. Odpověď je tedy 20.

Úloha 4. *Mějme horu ve tvaru pravidelného kužele s kruhovou podstavou o poloměru 1 cm mající výšku 2 cm.*

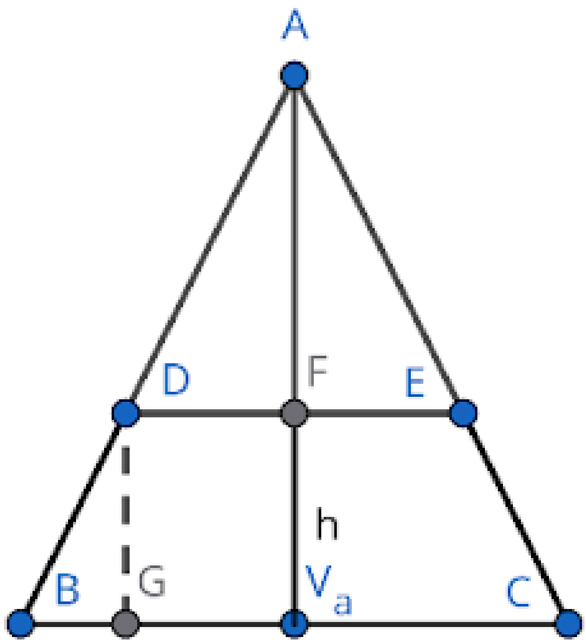
- *Píp horu obejde na druhou stranu po obvodu podstavy (půlkružnice).*
- *Čirik vystoupá nějakou vzdálenost po plášti směrem k vrcholu, poté obejde zbytek po půlkružnici rovnoběžné s podstavou a sestoupá nejkratší cestou po plášti zpět dolů.*

Označme $h > 0$ výšku, do které Čirik vystoupal.
Která z osob projde svou trasu dřív v závislosti na h? Obě osoby se pohybují stejnou nenulovou rychlostí. Jaká by musela být výška hory (kladná), aby byl výsledek jiný?

Řešení:

Protože se obě osoby pohybují stejnou rychlostí, můžeme ji zanedbat a porovnávat pouze dráhu.

Označme A vršek hory, B místo, kde ptáci začínají, C místo, kde končí, D, resp. E místo, kam Čirik vystoupá, resp. kde začne sestupovat. Řekněme, že bod G, resp. V_a je kolmý průmět D, resp. A na podstavu hory (kužele) a bod F kolmý průmět A na usečku DE. Potom průřez horou vypadá takto:



Víme, že poloměr podstavy je 1 cm a výška hory 2 cm, takže $|BV_a| = |CV_a| = 1$ a $|AV_a| = 2$. Platí $h = |DG| = |FV_a|$.

Dráha Pípa je rovna polovině obvodu kružnice o poloměru $|BV_a|$, tedy $O_P = \frac{2 \cdot \pi \cdot |BV_a|}{2} = \pi \cdot |BV_a|$.

Dráha Čirika je rovna $O_{\check{C}} = |BD| + \frac{2 \cdot |DF| \cdot \pi}{2} + |EC|$ – to jest délka, kterou vystoupal po plášti plus polovina obvodu půlkružnice o průměru $|DF|$ plus délka, kterou zase sestoupal. Trojúhelník AV_aB je shodný s trojúhelníkem AV_aC a $DE \parallel BC$, tedy $|BD| = |CE|$. Celkem je proto jeho dráha $O_{\check{C}} = 2 \cdot |BD| + |DF| \cdot \pi$.

$|DF|$ umíme spočítat pomocí podobnosti. Trojúhelník AV_aB je podobný s trojúhelníkem AFD

podle věty uu (jeden úhel společný, druhý pravý). Proto:

$$\frac{|DF|}{|AF|} = \frac{|DF|}{|AV_a| - h} = \frac{|BV_a|}{|AV_a|} \qquad / \cdot (|AV_a| - h)$$
$$|DF| = \frac{|BV_a| \cdot (|AV_a| - h)}{|AV_a|}$$

Pomocí Pythagorovy věty v trojúhelníku AV_aB spočítáme $|AB|$:

$$|AB|^2 = |BV_a|^2 + |AV_a|^2 \qquad /\sqrt{}$$
$$|AB| = \sqrt{|BV_a|^2 + |AV_a|^2}$$

Trojúhelník DGB je podobný s trojúhelníkem AV_aB podle věty uu (jeden úhel společný, druhý pravý). Z toho vyplývá, že

$$\frac{|BD|}{|DG|} = \frac{|AB|}{|AV_a|} \qquad / \cdot |DG|$$
$$|BD| = \frac{|AB| \cdot |DG|}{|AV_a|} = \frac{h \cdot |AB|}{|AV_a|}$$

. Když dosadíme z předchozího vzorečku, dostaneme

$$|BD| = \frac{h \cdot |AB|}{|AV_a|} = \frac{h \cdot \sqrt{|BV_a|^2 + |AV_a|^2}}{|AV_a|}$$

.

Dráhu tedy můžeme vyjádřit v zadaných hodnotách jako

$$O_Č = 2 \cdot |BD| + |DF| \cdot \pi = 2 \cdot \frac{h \cdot \sqrt{|BV_a|^2 + |AV_a|^2}}{|AV_a|} + \frac{|BV_a| \cdot (|AV_a| - h)}{|AV_a|} \cdot \pi$$

Nyní nás zajímá, kdo dojde dřív pro jaké h, proto dosadíme zadané hodnoty ($|BV_a| = 1$ a $|AV_a| = 2$) do vzorečků:

$$O_P = \pi \cdot |BV_a| = \pi$$
$$O_Č = 2 \cdot \frac{h \cdot \sqrt{|BV_a|^2 + |AV_a|^2}}{|AV_a|} + \frac{|BV_a| \cdot (|AV_a| - h)}{|AV_a|} \cdot \pi$$
$$= 2 \cdot \frac{h \cdot \sqrt{1^2 + 2^2}}{2} + \frac{1 \cdot (2 - h)}{2} \cdot \pi$$
$$= \sqrt{5} \cdot h + \left(1 - \frac{h}{2}\right) \cdot \pi$$
$$= \sqrt{5} \cdot h + \pi - \frac{h}{2} \cdot \pi$$

Spočítejme, pro která h má Píp kratší trasu:

$$O_P < O_Č$$
$$\pi < \sqrt{5} \cdot h + \pi - \frac{h}{2} \cdot \pi \qquad / - \pi$$
$$0 < \sqrt{5} \cdot h - \frac{h}{2} \cdot \pi$$
$$0 < h \cdot (\sqrt{5} - \frac{\pi}{2})$$

Lze vidět, že pro $h > 0$ nerovnice vždy platí, tedy Píp tedy vždy projde svou trasu rychleji než Čirik.

Aby tomu tak nebylo, musela by hora mít jinou výšku. Výška je $|AV_a|$. Porovnejme tedy dráhy ze vzorečků před dosazením za $|AV_a|$ a vyjádřeme $|AV_a|$:

$$
\begin{aligned}
O_P &> O_{\check{C}} \\
\pi \cdot |BV_a| &> 2 \cdot \frac{h \cdot \sqrt{|BV_a|^2 + |AV_a|^2}}{|AV_a|} + \frac{|BV_a| \cdot (|AV_a| - h)}{|AV_a|} \cdot \pi && /\text{dosadíme } |BV_a| = 1 \\
\pi &> 2 \cdot \frac{h \cdot \sqrt{1^2 + |AV_a|^2}}{|AV_a|} + \frac{|AV_a| - h}{|AV_a|} \cdot \pi && / \cdot |AV_a| \text{ (víme } |AV_a| > 0) \\
\pi \cdot |AV_a| &> 2 \cdot h \cdot \sqrt{1 + |AV_a|^2} + (|AV_a| - h) \cdot \pi \\
\pi \cdot |AV_a| &> 2 \cdot h \cdot \sqrt{1 + |AV_a|^2} + |AV_a| \cdot \pi - h \cdot \pi && / - \pi \cdot |AV_a| \\
0 &> 2 \cdot h \cdot \sqrt{1 + |AV_a|^2} - h \cdot \pi && / : h \text{ (víme } h > 0) \\
0 &> 2 \cdot \sqrt{1 + |AV_a|^2} - \pi && / + \pi, \text{ otočíme nerovnost} \\
2 \cdot \sqrt{1 + |AV_a|^2} &< \pi && / : 2 \\
\sqrt{1 + |AV_a|^2} &< \frac{\pi}{2} && /^2 \text{ (obě strany jsou kladné)} \\
1 + |AV_a|^2 &< \frac{\pi^2}{4} && / - 1 \\
|AV_a|^2 &< \frac{\pi^2}{4} - 1 && /\sqrt{} \\
|AV_a| &< \sqrt{\frac{\pi^2}{4} - 1} \doteq 1,2114
\end{aligned}
$$

Čirik tedy bude rychlejší, pokud výška hory bude menší než $\sqrt{\frac{\pi^2}{4} - 1}\,\text{cm} \doteq 1,2114\,\text{cm}$.

Úloha 5. *Píp si vybral číslo $x \in \{1, \ldots, 100000\}$ a všiml si, že zápis čísla $\frac{1}{x}$ má poslední nenulovou cifru za desetinnou čárkou na k-té pozici (je jich tedy jen konečně mnoho). Jaké největší může k být?*

Řešení:

Mějmě číslo $\frac{1}{x}$ pro $x \in \{1, \ldots, 100000\}$ s poslední nenulovou cifru za desetinnou čárkou na k-té pozici. Všimněme si, že $\frac{10^k}{x}$ je proto celé, ale $\frac{10^{k-1}}{x}$ není. Z toho vyplývá, že x musí být tvaru $2^a \cdot 5^b$ pro a, b nezáporná celá splňující $a \leq k$, $b \leq k$. Zároveň z toho, že $\frac{10^{k-1}}{x}$ není celé, se nemůže zároveň stát $a < k$ a $b < k$, tedy $k = a \geq b$ nebo $k = b \geq a$.

Naopak, pokud je x tvaru $2^a \cdot 5^b$, kde $k = a \geq b$ nebo $k = b \geq a$, potom $\frac{10^k}{x}$ je celé, ale $\frac{10^{k-1}}{x}$ není, a tak má $\frac{1}{x}$ poslední nenulovou cifru za desetinnou čárkou na k-té pozici.

Naši úlohu tedy můžeme přeformulovat na to, že hledáme $x \in \{1, \ldots, 100000\}$ tvaru $2^a \cdot 5^b$, kde je největší z čísel a, b maximální, a to bude naše hledané maximální k. Kdyby $b > 0$, pak $x = 2^a \cdot 5^b > 2^{a+b}$, tedy $2^{a+b} \in \{1, \ldots, 100000\}$, kde $a + b$ není menší než největší z čísel a, b. Proto nám stačí najít $x \in \{1, \ldots, 100000\}$ ve tvaru 2^a, kde a je největší možné. Snadno zjistíme, že tím je právě $2^{16} = 65536$. Správná odpověď je proto 16.

Úloha 6. *Najděte všechna reálná řešení dvou rovnic o třech neznámých:*

$$
\begin{aligned}
x + y &= 2, \\
xy - z^2 &= 1.
\end{aligned}
$$

Řešení:

První rovnici umocníme na druhou (je nutné poté udělat zkoušku) a druhou vynásobíme 4:

$$
\begin{aligned}
x^2 + 2xy + y^2 &= 4, \\
4xy - 4z^2 &= 4.
\end{aligned}
$$

Obě rovnice od sebe odečteme a upravíme:

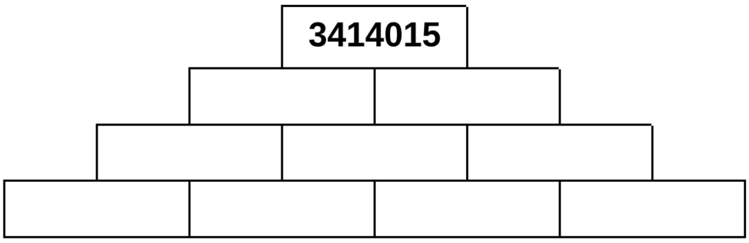
$$
\begin{aligned}
(x^2 + 2xy + y^2) - (4xy - 4z^2) &= 4 - 4 \\
x^2 - 2xy + y^2 + 4z^2 &= 0 \\
x^2 - 2xy + y^2 &= -4z^2 \\
(x - y)^2 &= -4z^2
\end{aligned}
$$

Číslo ve tvaru a^2 pro libovolné a je vždy nezáporné. Proto je levá strana rovnice vždy větší nebo rovna nule a pravá strana rovnice je vždy menší nebo rovna nule. Aby byla rovnost splněna, musí platit $(x - y)^2 = 0$ a zároveň $-4z^2 = 0$, tedy $x = y$ a zároveň $z = 0$. Ze zadání víme, že platí: $x + y = 2$, po dosazení dostáváme $x = y = 1$.

Zkouška: první rovnice: $1 + 1 = 2$, druhá rovnice: $1 \cdot 1 - 0^2 = 1$.

Řešením tedy je $x = 1$, $y = 1$, $z = 0$.

Úloha 7. *Školní budova má tvar pyramidy, jako je na obrázku, pro kterou platí, že kostka, která stojí nad dvěma kostkami pod ní, obsahuje součin čísel v těchto dvou kostkách. Všechna čísla v kostkách jsou přirozená a nahoře je číslo 3414015. Kolik je možností, jak může vyplněná pyramida vypadat?*



Řešení:

Nejprve číslo 3414015 rozložíme na prvočinitele $5 \cdot 19 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 11 \cdot 11 \cdot 11$. Nyní si uvědomíme, že stačí počítat možnosti dolních 4 čísel, jelikož zbytek pyramidy je dán podle nich. Označíme je zleva a, b, c, d, potom 2. patro je zleva $a \cdot b$, $b \cdot c$, $c \cdot d$, třetí patro je $a \cdot b \cdot b \cdot c$, $b \cdot c \cdot c \cdot d$ a nakonec že $3414015 = a \cdot b \cdot b \cdot b \cdot c \cdot c \cdot c \cdot d$.

Nyní spočítáme, kolika způsoby můžeme rozdělit prvočísla 5, 3, 19 a 11 a jejich mocniny do políček a, b, c, d tak, že exponent mocniny prvočísla v rozkladu čísel v políčkách a a d se při cestě nahoru do rozkladu čísla nahoře nezmění a exponent mocniny prvočísla v rozkladu čísel v políčkách b a c se při cestě nahoru do rozkladu čísla nahoře ztrojnásobí, a v rozkladu čísla nahoře se prvočísla 5 a 19 objevují s exponentem 1 a prvočísla 3 a 11 s exponentem 3.

Jelikož je násobení komutativní, stačí spočítat kolik možností pro rozdělení mezi 4 políčka je pro každé prvočíslo zvlášť a následně tyto možnosti spolu vynásobit.

Víme že 5 a 19 musí mít v rozkladu horního čísla exponent 1, tedy musí být právě v jednom z a nebo d (s exponentem 1), kdyby byly v b nebo c tak by ve výsledném rozkladu byly víckrát než 1 (s větším exponentem než 1). Proto máme pro obě tato prvočísla 2 možnosti.

Prvočísla 3 a 11 mohou být buď jednou v rozkladu b nebo c, ale pak už nesmí být v rozkladu zbylích 3 políček. To dává 2 možnosti pro obě. Nebo mohou být rozdělena mezi a a d a to buď s exponenty v rozkladu 3 a 0; 0 a 3; 2 a 1; 1 a 2. To dává další 4 možnosti, tedy celkem šest možností pro obě.

Součin možností pro všechna prvočísla je tedy $2 \cdot 2 \cdot 6 \cdot 6 = 144$ celkových možností jak pyramida může vypadat. Samozřejmě v možnostech, kde v nějakém políčku není v rozkladu žádné prvočíslo, musí být v tomto políčku číslo 1.