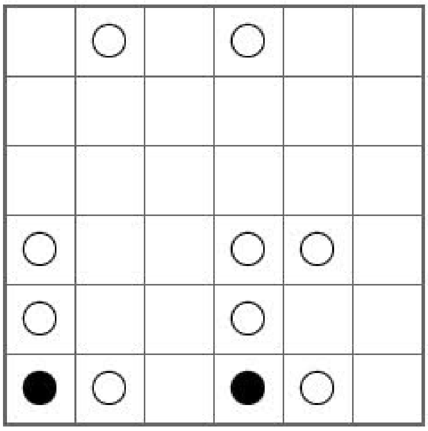
Řešení 4. série

Úloha 1. *V tabulce byla zakreslená uzavřená cesta, která procházela každým políčkem maximálně jednou. Veverka do ní nakreslila tečky podle následujících pravidel:*

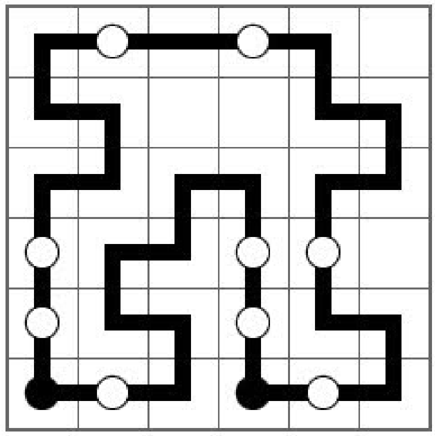
- *Na **každé** políčko, kterým cesta prochází rovně, ale v alespoň jednom sousedním políčku zahýbá, nakreslila bílou tečku.*
- *Na **každé** políčko, ve kterém cesta zahýbá, ale v obou sousedních políčkách pokračuje rovně, nakreslila černou tečku.*

(Pozn.: sousedním políčkem se myslí pouze políčko, na které z daného políčka vede cesta, nikoliv všechna políčka, se kterými je sdílena hrana.)
Poté Veverka cestu smazala. Zjistěte, kudy vedla.

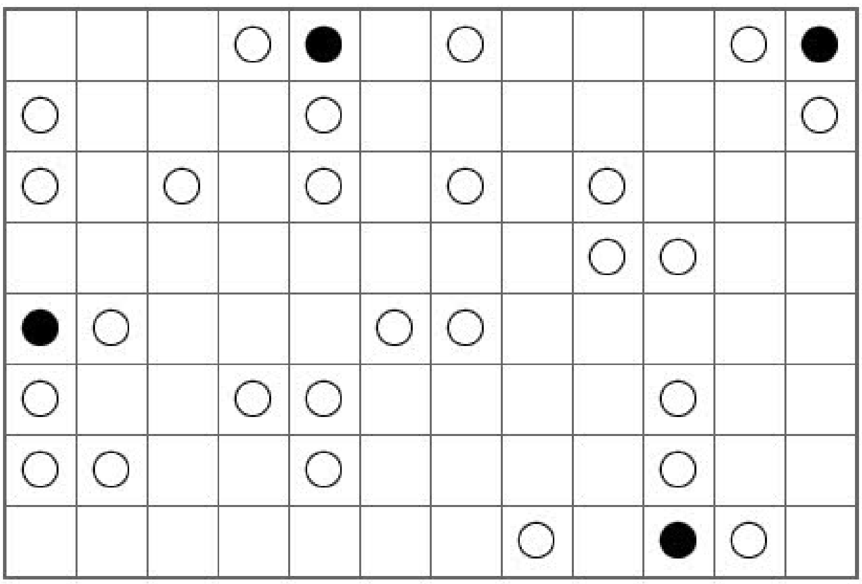
Příklad:



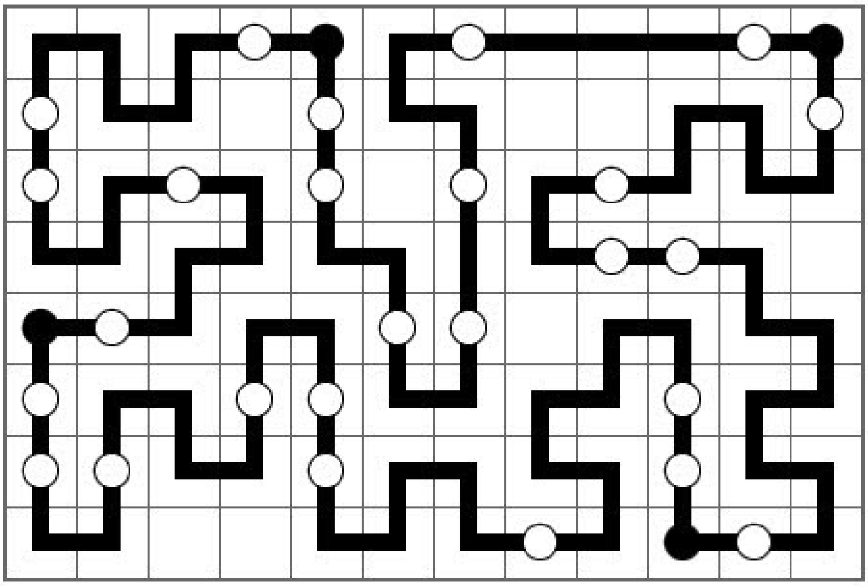
Příklad (jediné) řešení:



Vaše zadání:



Řešení:



Úloha 2. *Veverka si myslela trojciferné číslo. Sečetla jeho druhou a třetí cifru a odečetla první cifru. Šestnáctinásobek vzniklého čísla napsala na papír. Poté si všimla, že když sečte ciferný součet původního čísla a číslo napsané na papíře, dostane původní číslo. Jaké bylo?*

Řešení:

Označíme si cifry myšleného čísla jako x, y, z. Tedy myšlené číslo je $100 \cdot x + 10 \cdot y + z$. Dále víme, že x může být 1-9 a y a z může být 0-9.

Podle zadání je na papíře napsáno $16 \cdot (y + z - x)$ a celkem zadává rovnici:

$$\begin{aligned} 16 \cdot (y + z - x) + (x + y + z) &= 100 \cdot x + 10 \cdot y + z \\ -15 \cdot x + 17 \cdot y + 17 \cdot z &= 100 \cdot x + 10 \cdot y + z \qquad / + 15x - 10y - z \\ 7 \cdot y + 16 \cdot z &= 115 \cdot x \end{aligned}$$

Maximálně může být y a z rovno 9, tedy levá strana může být maximálně

$$7 \cdot y + 16 \cdot z = 7 \cdot 9 + 16 \cdot 9 = 207.$$

Potom x musí být menší než 2, protože $2 \cdot 115 = 230 > 207$ takže by pravá strana byla větší než levá, což je spor.

Zároveň nemůže platit $x = 0$, protože by myšlené číslo nebylo trojciferné. Tedy zbývá pouze možnost $x = 1$. To dosadíme do předchozí rovnice:

$$\begin{aligned} 7 \cdot y + 16 \cdot z &= 115 \cdot 1 \qquad / - 16 \cdot z \\ 7 \cdot y &= 115 - 16 \cdot z \qquad / - 16 \cdot z \end{aligned}$$

Levá strana může být minimálně $7 \cdot 0 = 0$ a maximálně $7 \cdot 9 = 7 \cdot 9 = 63$. z tedy musí být

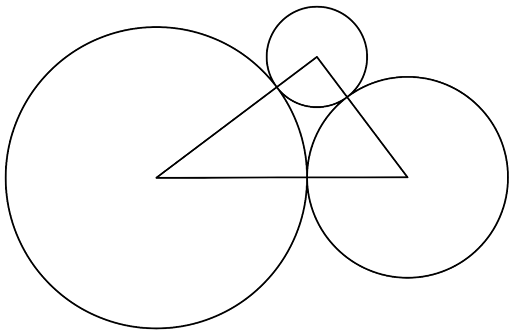
- Menší než 8, protože $115 - 16 \cdot 8 = -13 < 0$ takže by pravá strana byla menší než levá, což je spor.
- Větší než 3, protože $115 - 16 \cdot 3 = 67 > 63$ takže by práva strana byla větší než levá, což je spor.

Zbývá nám, že z může být 4, 5, 6 nebo 7. Nyní je vyzkoušíme a zjistíme, kdy nám vyjde vhodné y.

- $z = 4$: $7 \cdot y = 115 - 16 \cdot 4 = 51$, tedy $y = 51 : 7 \doteq 7,3$, což není celočíselné.
- $z = 5$: $7 \cdot y = 115 - 16 \cdot 5 = 35$, tedy $y = 35 : 7 = 5$, našli jsme tedy možné řešení.
- $z = 6$: $7 \cdot y = 115 - 16 \cdot 6 = 19$, tedy $y = 19 : 7 \doteq 2,7$, což není celočíselné.
- $z = 7$: $7 \cdot y = 115 - 16 \cdot 7 = 3$, tedy $y = 3 : 7 \doteq 0,4$, což není celočíselné.

Zjišťujeme, že jediná možnost je $z = 5$, myšlené číslo tedy je 155.

Úloha 3. *Tři kruhy jsou položeny tak, že se navzájem dotýkají a jejich středy tvoří pravoúhlý trojúhelník, viz obrázek. Jaký poloměr má nejmenší kruh, jestliže zbylé dva kruhy mají poloměry 2 a 3?*



Řešení:

Neznámý poloměr kružnice označíme r. Odvěsny pravoúhlého trojúhelníku mají potom délku $3 + r$, $2 + r$, přepona má délku $2 + 3 = 5$. Podle Pythagorovy věty platí:

$$\begin{aligned} (3+r)^2 + (2+r)^2 &= 5^2 \\ 9 + 6r + r^2 + 4 + 4r + r^2 &= 25 && / - 25 \\ 2r^2 + 10r - 12 &= 0 && / : 2 \\ r^2 + 5r - 6 &= 0 \end{aligned}$$

Kořeny této kvadratické rovnice lze buď uhádnout, nebo spočítat pomocí diskriminantu:

$$\begin{aligned} D = b^2 - 4ac &= 5^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-6) = 49 \\ r_1 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2} &= \frac{-5 + \sqrt{49}}{2} = 1 \\ r_2 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2} &= \frac{-5 - \sqrt{49}}{2} = -6 \end{aligned}$$

Poloměr kružnice nemůže být záporný, takže jediné řešení je $r = 1$

Úloha 4. *Veverka a Václavek mají každý na papírku dvě kladná čísla. Součet čísel na jednom a na druhém papírku je stejný. Dokažte, že pokud jsou čísla na Veverčině papírku stejná, tak součin čísel na Václavkově papírku nemůže být větší než součin čísel na Veverčině papírku.*

Řešení:

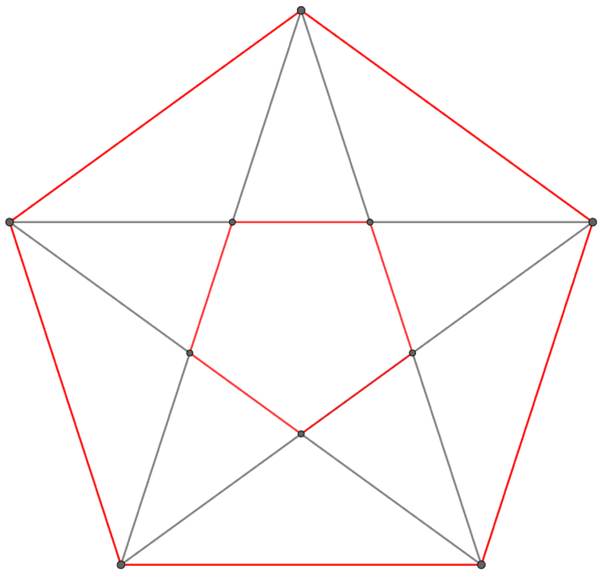
Označme kladná čísla Václavka x, y, jejich součet je potom tedy $x + y$. Pokud jsou čísla na Veverčině papírku stejná, musí být rovna $\frac{x+y}{2}$.

Chceme tedy dokázat $x \cdot y \leq \frac{x+y}{2} \cdot \frac{x+y}{2}$. Upravíme:

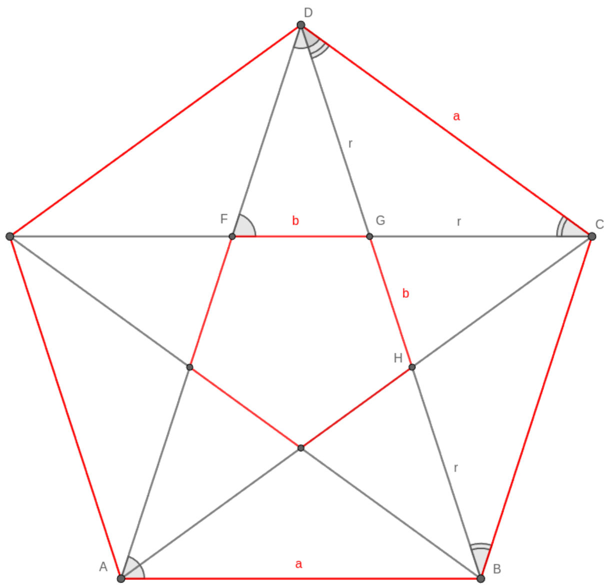
$$
\begin{aligned}
x \cdot y &\leq \frac{x+y}{2} \cdot \frac{x+y}{2} && / \cdot 4 \\
4 \cdot x \cdot y &\leq (x+y) \cdot (x+y) \\
4 \cdot x \cdot y &\leq x^2 + 2 \cdot x \cdot y + y^2 && / - 4 \cdot x \cdot y \\
0 &\leq x^2 - 2 \cdot x \cdot y + y^2 \\
0 &\leq (x-y)^2
\end{aligned}
$$

$(x - y)^2$ je kvadrát, tento výraz tedy bude vždy nezáporný, neboli námi dokazovaná nerovnice bude vždy platit.

Úloha 5. *Máme pentagram a jemu opsaný pětiúhelník (tj. pravidelný pětiúhelník se všemi pěti úhlopříčkami). Spočítejte poměr stran velkého a malého pětiúhelníku. (Hodnotí se hlavně postup a jeho důkladné vysvětlení.)*
Nápověda: Doporučujeme si k řešení úlohy nastudovat podobné trojúhelníky nebo goniometrické funkce.



Řešení pomocí podobných trojúhelníků:



Označíme některé vrcholy pětiúhelníků (viz obrázek). Označme délku strany velkého pětiúhelníku jako a, malého jako b. Označme délku úseček spojujících nejbližší dvojice vrcholů malého a velkého vrcholu jako r (viz obrázek). Naším úkolem je spočítat poměr stran velkého a malého pětiúhelníku, tedy $a : b$.

Můžeme si všimnout, že trojúhelníky ABD a FGD jsou oba rovnoramenné (ze symetrie) a sdílí úhel u vrcholu D, tedy jsou podobné (podle věty *sus*). Proto jsou úhly BAD a GFD stejně velké. Ze symetrie jsou stejně velké i úhly BAD a CDA, takže úhly GFD a CDA jsou stejně velké. Potom je trojúhelník

CDF rovnoramenný. Jedno jeho rameno má délku a, druhé $b + r$, takže $a = b + r$. Úhlopříčka velkého pětiúhelníku má tedy délku $r + b + r = r + a$.

Ze symetrie musí platit, že úhly DBC, BDC a GCD jsou shodné, proto jsou trojúhelníky CBD, GCD podobné podle věty *uu*. Z toho plyne:

$$\begin{aligned} |CD| : |GD| &= |BD| : |CD| \\ a : r &= (a + r) : a && / \cdot a : r \\ (a : r)^2 &= (a + r) : r = a : r + 1 && / - a : r - 1 \\ (a : r)^2 - a : r - 1 &= 0 \end{aligned}$$

Když substitujeme $x = a : r$, dostaneme kvadratickou rovnici

$$x^2 - x - 1 = 0$$

Tu můžeme vyřešit pomocí diskriminantu:

$$\begin{aligned} D &= b^2 - 4ac = (-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-1) = 1 + 4 = 5 \\ x_1 &= \frac{-b + \sqrt{D}}{2a} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \doteq 1,618 \\ x_2 &= \frac{-b - \sqrt{D}}{2a} = \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \doteq -0,618 \end{aligned}$$

Jediné řešení je x_1, jelikož x je podíl dvou délek, a tedy kladné číslo.

Další důsledek podobnosti trojúhelníků ABD a FGD (kterou jsme dokázali dříve) je

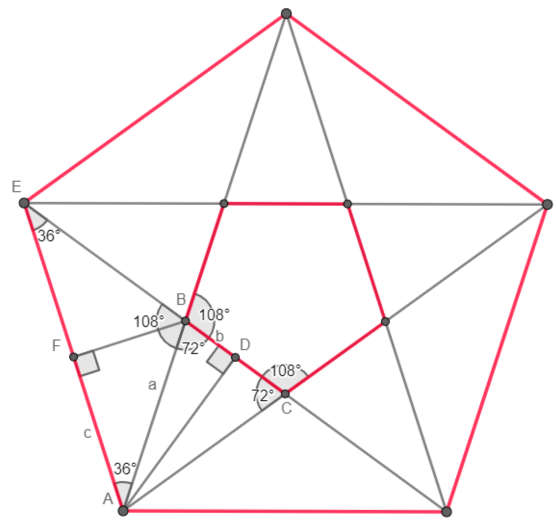
$$\begin{aligned} |AB| : |FG| &= |BD| : |GD| \\ a : b &= (r + a) : r = 1 + a : r \end{aligned}$$

Můžeme dosadit $a : r = x = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$:

$$a : b = 1 + \frac{1 + \sqrt{5}}{2} = \frac{3 + \sqrt{5}}{2} \doteq 2,618$$

Řešení je tedy $\frac{3+\sqrt{5}}{2} \doteq 2,618$

Řešení pomocí goniometrických funkcí:



Nejdříve si spočítáme úhly v pentagramu a pětiúhelníku.

Pravidelný pětiúhelník má všechny úhly stejně velké, které mají $108°$ (vnitřní úhel v pravidelném n-úhelníku se dá spočítat jako $\frac{(n-2)\cdot 180°}{n}$). Větší úhly trojúhelníků pentagramu (např. $\triangle ABC$) jsou vedlejší k úhlu $108°$, tudíž mají velikost $72°$.

Trojúhelníky pentagramu (např. $\triangle ABC$) jsou rovnoramenné, protože mají dva úhly stejnou velikost.

Spočítáme úhly v malých trojúhelnících mimo pentagram (např. $\triangle ABE$). Tyto trojúhelník ješou rovnoramenné, protože má dvě strany ze stran trojúhelníků pentagramu. Úhel naproti základně ($\sphericalangle ABE$) je vrcholový s úhlem $108°$, takže má velikost $108°$. Úhly při základně mají potom velikost $\frac{180°-108°}{2} = 36°$.

Vezmeme si trojúhelník v pentagramu (např. $\triangle ABC$). Vedeme výšku k základně. Výška základnu rozdělí na poloviny, protože je trojúhelník rovnoramenný. Polovinu strany malého pětiúhelníku (BD) si označím b. Přeponu vzniklého pravoúhlého trojúhelníku (AB) si označím a. Úhel mezi stranami a, b je $72°$. Protože strany i úhel jsou v pravoúhlém trojúhelníku ABD, vím, že přilehlá stranu ku přeponě je cosinus úhlu mezi nimi, tudíž $b : a = \cos 72°$, z čehož vyjádříme $b = a \cdot \cos 72°$.

Vezmeme si malý trojúhelník mimo pentagram (např. $\triangle ABE$). Vedeme výšku k základně. Výška rozdělí základnu na poloviny, protože je trojúhelník rovnoramenný. Polovinu strany velkého pětiúhelníku (AF) si označím c. Přepona vzniklého pravoúhlého trojúhelníku (AB) je stejná strana jako přepona minulého pravoúhlého trojúhelníku, tudíž už je označena a. Úhel mezi stranami a, c je $36°$. Protože strany i úhel jsou v pravoúhlém trojúhelníku, vím, že přilehlá stranu ku přeponě je cosinus úhlu mezi nimi, tudíž $c : a = \cos 36°$, z čehož vyjádříme $c = a \cdot \cos 36°$.

Chceme zjistit poměr strany velkého pětiúhelníku ku straně malého pětiúhelníku. Poměr stran zůstane zachován i když obě strany vydělíme či vynásobíme stejným číslem. Proto můžeme počítat poměr z polovin stran:

$$|AF| : |BD|$$
$$c : b$$
$$a \cdot \cos 36° : a \cdot \cos 72°7/ : a$$
$$\cos 36° : \cos 72°$$

Řešení je tedy $\cos 36° : \cos 72° \doteq 0,809 : 0,309 \doteq 2,618$.

Úloha 6. *Kolika způsoby může dopadnout hod čtyřmi šestistěnnými kostkami, jestliže jsou navzájem nerozlišitelné? Záleží tedy pouze na tom, jaké hodnoty padnou, a ne na tom, na kterých kostkách (tedy 1112 je stejné jako 1211).*

Řešení:

Nechť každý hod zapíšeme tečkou do schématu níže do okýnka podle toho, jaké číslo padlo:

1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6

Pokud tedy například padlo 5262, schéma bude vypadat následovně: $| \cdot \cdot | | | \cdot | \cdot$

Máme tedy vždy 4 tečky a 5 čárek. Počet řešení je tedy tolik, kolika způsoby můžeme z 9 symbolů vybrat 4 tečky (každá kombinace symbolů bude značit nějaký možný hod, každý hod má právě 1 způsob jak ho lze zapsat). Chceme-li z 9 symbolů vybrat 4, tak počet možností, jak je vybrat v případě, že závisí na pořadí, v jakém je vybereme, je $9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6$, jelikož nejprve máme na výběr z 9 symbolů, následně z 8 symbolů (jeden už jsme vybrali a nemůžeme jej vybrat znovu, protože bychom jej vybrali dvakrát a my chceme mít vybrané 4 různé symboly) atd. Nyní máme $9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 = 3024$ možností. Jelikož nás však zajímá počet možností v případě, kde nezávisí na pořadí, tak musíme spočítat, kolikrát jsme takto každou možnost započítali. Máme tedy čtveřici symbolů. Nyní spočítáme počet možností, jak jsme je mohli dostat. Jako první jsme mohli vzít kterýkoliv ze 4 symbolů, jako druhý kterýkoliv ze zbývajících 3, jako třetí některý ze 2 a jako čtvrtý ten poslední, Každou možnost jsme tedy počítali $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$ krát. Jelikož jsme každou možnost počítali 24 krát, tak musíme počet všech možností vydělit 24. $\frac{3024}{24} = 126$.

Hod může tedy dopadnout 126 způsoby.

Pozn. pro pokročilé: počet možností, jak z n věcí vybrat k když nezáleží na pořadí, ve kterém je vybereme, se značí $\binom{n}{k}$ (čteme „n nad k“) a je definované jako $\frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$, kde $a!$ (čteme „a faktoriál“) znamená $(a) \cdot (a-1) \cdot (a-2) \cdots 2 \cdot 1$. V případě uvedeném výše jsme vlastně dokázali funkčnost tohoto vzorce s vynecháním společné části $(n-k)!$, tedy $(9-4)!$ v čitateli i jmenovateli.

Úloha 7. *Pro všechna nezáporná celá čísla a, b platí*

$$(2^a - 1)|(2^{a\cdot b} - 1).$$

Dokažte, že pokud pro prvočíslo $p \geq 3$ a nezáporná celá čísla x, y platí

$$p^2 + 2^y = x^2,$$

potom $y - 2$ musí být prvočíslo.
(Pozn.: pro celá čísla k, l platí $k|l$ právě tehdy, když existuje nějaké celé m takové, že $k \cdot m = l$)

Řešení:
Mocninou dvojky budeme rozumět číslo 2^m pro nějaké nezáporné celé m.

Od obou stran rovnice v zadání odečteme p^2 a následně použijeme známý vzorec $x^2 - p^2 = (x+p)(x-p)$:

$$2^y = x^2 - p^2 = (x+p)(x-p) \tag{1}$$

Z toho vyplývá, že $x + p$ i $x - p$ musí být mocninami dvojky.

Pro spor nyní předpokládejme, že 4 dělí $x - p$. Pak pro nějaké přirozené k platí $x - p = 4k$ (pokud bychom měli $k = 0$, nebylo by $x - p$ mocninou dvojky), takže

$$x + p = 4k + 2p. \tag{2}$$

Jelikož víme, že $p \geq 3$, musí být p liché (jediné sudé prvočíslo je 2), takže pravá strana rovnice (2) nemůže být dělitelná čtyřmi. Z toho dostáváme, že $x + p$ je mocnina dvojky nedělitelná čtyřmi, tudíž je maximálně 2, a proto musí platit

$$2 \geq x + p > x - p = 4k \geq 4,$$

což je očividně spor. Číslo $x - p$ tedy nemůže být dělitelné čtyřmi, takže je 1 nebo 2 (protože je to mocnina dvojky).

Případ $x - p = 1$ Po vyjádření $x = 1 + p$ a dosazení do rovnice (1) máme

$$2^y = 2p + 1.$$

Číslo $2p + 1$ je liché a z podmínky $p \geq 3$ není menší než $2 \cdot 3 + 1 = 7$, a proto to nemůže být mocnina dvojky 2^y. Tento případ tedy nemůže nastat.

Případ $x - p = 2$ Opět vyjádříme $x = p + 2$ a tento výraz dosadíme do rovnice (1), čímž dostaneme

$$\begin{aligned} 2^y &= (2p+2)2 = 4(p+1) \\ 2^{y-2} &= p + 1 \\ 2^{y-2} - 1 &= p. \end{aligned} \tag{3}$$

Vidíme, že 2^{y-2} je celé číslo. Nyní budeme zase pro spor předpokládat, že $y - 2$ není prvočíslo. Zřejmě se nemůže rovnat jedné, jelikož bychom pak hned dostali $p = 1$. Číslo $y - 2$ tedy musí být složené, z čehož dostáváme $y - 2 = r \cdot s$ pro nějaká přirozená r, s větší než 1. Pak ze vztahu v zadání a rovnici (3) víme, že

$$2^r - 1 | 2^{y-2} - 1 = p. \tag{4}$$

Všimněme si ale, že platí

$$1 = 2^1 - 1 < 2^r - 1 < 2^{r\cdot s} - 1 = p,$$

taže je číslo $2^r - 1$ ze vztahu (4) dělitel prvočísla p, který se ale nerovná 1, ani p. To je spor, takže náš předpoklad, že $y - 2$ není prvočíslo je chybný. □