

Řešení 3. série

Úloha 1. *Myslivec vaří guláš. Od maminky dostal recept na 1 porci:*

- 5 stroužků česneku
- 200 g cibule
- 1 kg masa
- 10 g koření

Nesmí po něm zůstat žádné zbytky, tedy musí spotřebovat všechny suroviny, co koupí (a přichystat celočíselný počet porcí).

- Česnek zvládne opatřit pouze v balení po třech stroužcích
- Cibuli kupuje po 250 gramech
- Maso se prodává v balení po 2 kilech
- Koření se prodává v libovolném množství, ale musí jej použít méně než 1 kg, protože při tomto množství nebude místo na skladování

Kolik má myslivec uvařit porcí guláše tak, aby po něm nic nezůstalo a aby obsloužil co nejvíce osob?

Řešení:

Na výsledný guláš bude myslivec potřebovat x -násobky všech ingrediencí.

- Pokud se česnek prodává po třech stroužcích a v receptu jich potřebuje pět, bude muset vařit trojnásobky receptu (na „trojitý“ recept totiž potřebuje 15 stroužků česneku, které se dají opatřit jako pět balení po třech).
- Cibule se prodává po $\frac{250g}{200g} = \frac{5}{4}$ množství v receptu, proto potřebuje „pětinásobný“ recept.
- Maso se prodává pouze v dvojnásobcích množství v receptu. Tedy potřebuje „dvojnásobný“ recept.
- Abychom nepoužili více než 1 kg česneku, nesmíme uvařit víc než $\frac{1kg}{10g} = 100$ porcí.

Recept tak musí být dvojnásobný, trojnásobný a pětinásobný zároveň. Nejmenší společný násobek těchto čísel je 30. Počet porcí je tedy násobek 30. Kvůli koření jsou tedy povolené počty porcí 30, 60 a 90. Jde tak o výsledek – myslivec by měl uvařit devadesát porcí guláše, na který použije devadesátinásobek ingrediencí v receptu.

Úloha 2. V truhlici jsou sudokuny, lichokuny a brambory. Jsou tam dvě sudokuny, n lichokun a dohromady je v ní 10 předmětů. Po jednom náhodně vytahujeme předměty a necháváme je vytažené. Jaká je pravděpodobnost, že pátý vytažený předmět bude sudokuna?

Elegantní řešení:

Je jedno, jestli předmět máme vybrat jako první, druhý, nebo pátý – pravděpodobnost bude vždy stejná. Pravděpodobnost, že první předmět bude sudokuna je $\frac{2}{10} = \frac{1}{5}$, tedy i výsledná pravděpodobnost je $\frac{1}{5}$.

Jiné řešení:

Pokud by nás nenapadlo, že je stejná pravděpodobnost vytáhnout daný předmět jako první a jako pátý, můžeme úlohu řešit i takto:

Mezi prvními čtyřmi vytaženými předměty mohlo být buďto 0, 1 nebo 2 sudokun.

- Pokud byly 2, pak již žádná nezbyla na páté vytažení, a tedy tuto možnost nemusíme uvažovat.
- Pravděpodobnost, že nebyly vytaženy žádné, spočítáme jako

$$\frac{8}{10} \cdot \frac{7}{9} \cdot \frac{6}{8} \cdot \frac{5}{7} = \frac{1}{3}$$

Poté zbývá pravděpodobnost $\frac{2}{6}$, že bude sudokuna vybrána jako pátá.

- Pravděpodobnost, že byla vytažena 1 sudokuna, je už těžší, ale stačí si uvědomit, že je jedno, jestli byla vytažena jako první, druhá, třetí nebo čtvrtá. Tedy tyto pravděpodobnosti jsou stejné a stačí spočítat pouze jednu a vynásobit 4. Tedy:

$$4 \cdot \left(\frac{2}{10} \cdot \frac{8}{9} \cdot \frac{7}{8} \cdot \frac{6}{7} \right) = \frac{8}{15}$$

Poté zbývá pravděpodobnost $\frac{1}{6}$, že bude sudokuna vybrána jako pátá.

Když spočítané pravděpodobnosti sečteme, získáme $\frac{1}{3} \cdot \frac{2}{6} + \frac{8}{15} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{9} + \frac{4}{45} = \frac{1}{5}$.

Úloha 3. Nahradte písmena číslicemi (každé písmeno jinou číslicí) tak, aby výpočty souhlasily ve vodorovném i svislém směru. Najděte všechna řešení. (Pozn.: v žádném čísle na první pozici zleva není 0.)

$$\begin{array}{rcccl}
 A & \times & BC & = & DEC \\
 \times & & : & & \times \\
 DE & & B & & A \\
 \hline
 AF & \times & DC & = & AFC
 \end{array}$$

Řešení:

Z posledního řádku ($AF \times DC = AFC$) vyplývá, že $D = 1$ a $C = 0$. Zadání přepíšeme a dostáváme:

$$\begin{array}{rcccl}
 A & \times & B0 & = & 1E0 \\
 \times & & : & & \times \\
 1E & & B & & A \\
 \hline
 AF & \times & 10 & = & AF0
 \end{array}$$

Ze svislé rovnice vlevo ($A \times 1E = AF$) plyne: $A \times E = F$. Vypíšeme si tedy všechny možnosti (víme že písmena reprezentují číslice, které se neopakují):

- $A = 2, E = 3, F = 6$;
- $A = 2, E = 4, F = 8$;
- $A = 3, E = 2, F = 6$;
- $A = 4, E = 2, F = 8$.

Dosazením do zadání zjistíme, že možnost $A = 2, E = 3, F = 6$ nevychází, zbylé ano. Dopočítáme tedy pro každou možnost B ($B = 7, B = 4, B = 3$).

Řešení jsou celkem 3 a to:

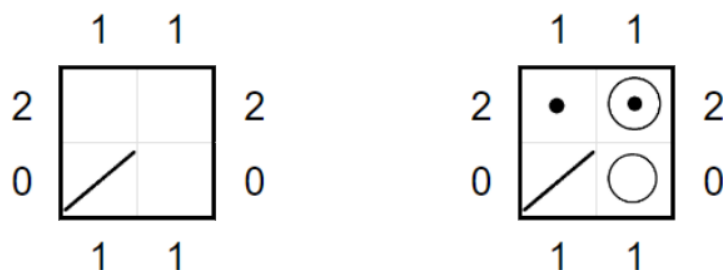
- $A = 2, B = 7, C = 0, D = 1, E = 4, F = 8$;
- $A = 3, B = 4, C = 0, D = 1, E = 2, F = 6$;
- $A = 4, B = 3, C = 0, D = 1, E = 2, F = 8$.

Úloha 4. Máme 3 typy pytláků (značíme je kolečky – viz obrázek) a neprospustná zrcadla (reflexivní z obou stran).

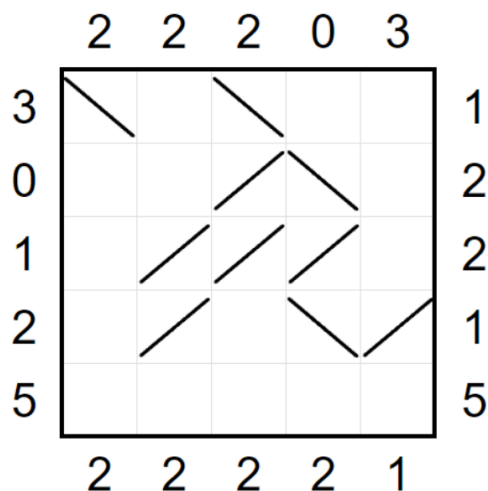


1. typ pytláka je „klasický“, tj. vidíme jej paprskem odraženým od zrcadla i napřímo – bez zrcadla. 2. typ pytláka je „upíří“, tj. vidíme jej pouze napřímo, ale v zrcadle je neviditelný. 3. typ pytláka je naopak „protiupíří“, čili viditelný je pouze v zrcadle, nikoli napřímo. Vyplňte všechna políčka tabulky (kromě těch se zrcadly), pokud víte, že v tabulce jsou 3 pytláci 1. typu, 7 pytláků 2. typu a 5 pytláků 3. typu. Na kraji tabulky je napsáno, kolik pytláků pozorovatel z daného místa vidí, když se podívá do mřížky podél řádku nebo sloupce. Každý pytlák je započítán tolikrát, kolikrát přes něj paprsek projde (čili může být i dvakrát).

Příklad:

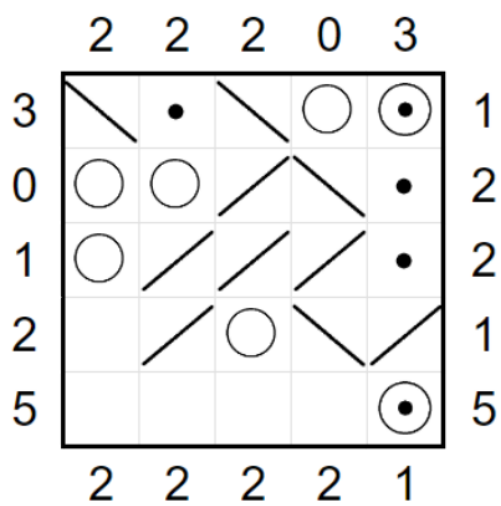
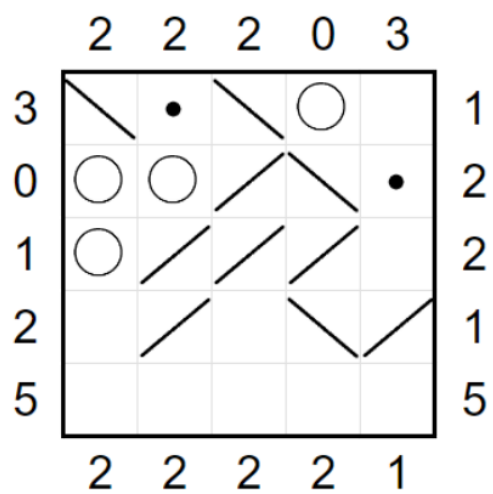


Vaše zadání:

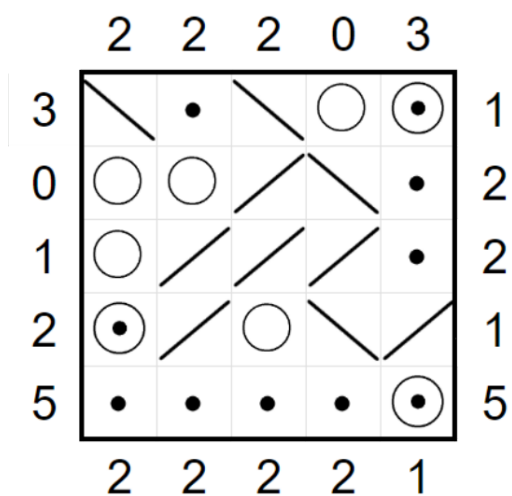


Řešení:

Možný postup:



Vyplněná tabulka:



Úloha 5. Najděte nejmenší celé číslo n větší než 1, pro které platí: $1|n$, $2|n+1$, $3|n+2$, $4|n+3$, $5|n+4$, $6|n+5$, $7|n+6$, $8|n+7$, $9|n+8$, $10|n+9$.

Poznámka: značení $a|b$ znamená, že číslo b je dělitelné číslem a .

Řešení:

Definujme $k = n - 1$. Poté:

- 1 je dělitelné vše
- Je-li $n+1$ dělitelné 2, pak k musí být taky dělitelné 2, jelikož $(n+1) - k = (n+1) - (n-1) = 2$
- Je-li $n+2$ dělitelné 3, pak k musí být taky dělitelné 3, jelikož $(n+2) - k = (n+2) - (n-1) = 3$
- Je-li $n+3$ dělitelné 4, pak k musí být taky dělitelné 4, jelikož $(n+3) - k = (n+3) - (n-1) = 4$
- Je-li $n+4$ dělitelné 5, pak k musí být taky dělitelné 5, jelikož $(n+4) - k = (n+4) - (n-1) = 5$
- Je-li $n+5$ dělitelné 6, pak k musí být taky dělitelné 6, jelikož $(n+5) - k = (n+5) - (n-1) = 6$
- Je-li $n+6$ dělitelné 7, pak k musí být taky dělitelné 7, jelikož $(n+6) - k = (n+6) - (n-1) = 7$
- Je-li $n+7$ dělitelné 8, pak k musí být taky dělitelné 8, jelikož $(n+7) - k = (n+7) - (n-1) = 8$
- Je-li $n+8$ dělitelné 9, pak k musí být taky dělitelné 9, jelikož $(n+8) - k = (n+8) - (n-1) = 9$
- Je-li $n+9$ dělitelné 10, pak k musí být taky dělitelné 10, jelikož $(n+9) - k = (n+9) - (n-1) = 10$

Dostáváme tedy, že k je číslo dělitelné 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 a 10. n , a tedy i k , má být co nejmenší, takže k je nejmenší společný násobek těchto čísel.

- $10 = 2 \cdot 5$
- $9 = 3 \cdot 3$
- $8 = 2 \cdot 2 \cdot 2$
- $7 = 7$
- $6 = 3 \cdot 2$
- $5 = 5$
- $4 = 2 \cdot 2$
- $3 = 3$
- $2 = 2$
- $1 = 1$

Nejmenší společný násobek je tedy $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 = 2520 = k$, tedy $n = k + 1 = 2520 + 1 = 2521$.

Nejmenší n větší než 1 splňující podmínky ze zadání je tedy 2521.

Úloha 6. *Myslivec napsal na papír všechna čtyřciferná čísla, která po dělení 13 dávají zbytek 6. Poté ale jedno smazal. Nyní součet čísel napsaných na papíru je 3799743. Které číslo bylo smazáno?*

Řešení:

Nejprve musíme zjistit, jaký byl součet čísel na papíru před smazáním neznámého čísla.

Na papíru byla napsána čísla: 1007, 1020, 1033, ..., 9964, 9977, 9990.

Kolik jich je dohromady? Rozdíl prvního a posledního je $9990 - 1007 = 8983 = 691 \cdot 13$. To znamená, že po mezi prvním a posledním číslem došlo k 691 zvýšením o 13, tedy po prvním čísle bylo 691 čísel, tedy dohromady bylo 692 čísel na papíře.

Jaký je jejich součet? Označme

$$s_n = 1007 + 1020 + 1033 + \dots + 9964 + 9977 + 9990$$

Zároveň očividně platí

$$s_n = 9990 + 9977 + 9964 + \dots + 1033 + 1020 + 1007$$

Tyto dvě rovnice můžeme sečíst a dostaneme

$$2 \cdot s_n = (1007 + 9990) + (1020 + 9977) + (1033 + 9964) + \dots + (9964 + 1033) + (9977 + 1020) + (9990 + 1007)$$

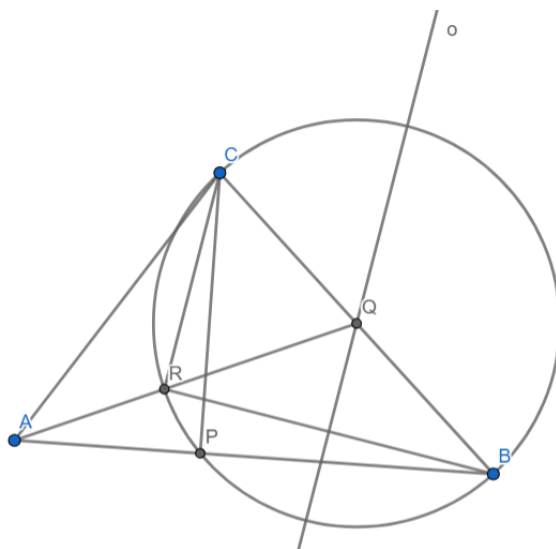
Ve výrazu je stejně závorek jako čísel, tedy 692. Zároveň si můžeme všimnout, že každá má součet 10997. Platí tedy

$$\begin{aligned} 2 \cdot s_n &= 692 \cdot 10997 = 7609924 \\ s_n &= 3804962 \end{aligned}$$

Součet čísel na papíře před smazáním neznámého čísla byl tedy 3804962. Jelikož nyní je 3799743, smazané číslo musí být $3804962 - 3799743 = 5219$.

Úloha 7. Na papírku je nakreslený ostroúhlý trojúhelník ABC . Patu výšky z bodu C na stranu AB označme P , střed strany BC označme Q a osu úhlu BQA označme o . Dokažte, že kružnice opsaná trojúhelníku BCP , úsečka AQ a rovnoběžka přímky o vedená přes bod C se protínají v jednom bodě.

Řešení:



Při dokazování toho, že se tři přímky (nebo kružnice) x , y , a z protínají v jednom bodě, se většinou postupuje tak, že se definuje nějaký bod W jako průsečík například x a y a následně se dokáže, že W leží i na z .

Označme tedy průsečík úsečky AQ s rovnoběžkou přímky o vedenou přes C jako R . Chceme tedy, aby bod R ležel na kružnici opsané trojúhelníku BCP . Úhel BPC je ze zadání pravý, takže ta opsaná kružnice je ve skutečnosti Thaletova kružnice nad úsečkou BC se středem Q . Proto stačí dokázat například to, že $QR = QC$.

Nazvěme úhel BCR jako α . Potom z definic přímek CR a o platí, že $|\angle BQR| = 2 \cdot \alpha$, a tedy $|\angle RQC| = 180^\circ - 2 \cdot \alpha$. V trojúhelníku RQC pak dokážeme dopočítat, že $|\angle QRC| = 180^\circ - (180^\circ - 2 \cdot \alpha + \alpha) = \alpha$. Trojúhelník QRC je tedy rovnoramenný se základnou RC . Potom $QR = QC$, což jsme chtěli dokázat.