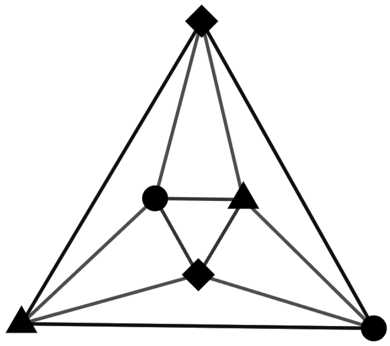
Řešení 2. série

Úloha 1. *Na louce stojí šest stromů: vysoký a nízký, široký a úzký, tmavý a světlý. Mravenci mezi nimi chtějí postavit dálnice, které budou propojovat každé dva stromy, které si nejsou protikladem, tj. dvanáct dálnic z možných patnácti.*

1. *Načrtněte, kudy by mohly dálnice vést tak, aby se žádné dvě nekřížily (polohu stromů si můžete libovolně zvolit).*
2. *Jak by měly být rozestavěné stromy tak, aby dálnice byly rovnými úsečkami?*

Řešení:

Označíme vysoký a nízký strom kolečkem, široký a úzký trojúhelníčkem a tmavý a světlý čtverečkem. Pak můžeme stromy rozestavět takto:



Úloha 2. *Dokažte, že žádné pěticiferné číslo není druhou mocninou svého ciferného součtu.*

Řešení:

Předpokládejme, že nějaké takové číslo existuje. Označme ho x a jeho ciferný součet jako s.

Všimněme si, že $s \leq 5 \cdot 9 = 45$, protože x je pěticiferné a každá jeho cifra je maximálně 9. Zároveň to, že je x pěticiferné, znamená, že $x \geq 10000$.

Pro x má platit $x = s^2$.

Z našeho pozorování platí $10000 \leq x = s^2 \leq 45^2 = 2025$. To by znamenalo, že $10000 \leq 2025$, takže jsme došli ke sporu. Žádné takové x tedy nemůže existovat.

Úloha 3. *Myslivec má v krabičce 3 typy zvířat – draky, hydry a saně. Určete, kolik je od každého druhu, pokud víte, že:*

- *Drak ma 2 křídla a 3 ocasy,*
- *hydra má 4 křídla a žádný ocas,*
- *saň má 8 křídel a 1 ocas,*
- *v krabičce je více saní než draků,*
- *v krabičce je celkem 120 křídel a 14 ocasů.*

Řešení:

Počet draků si označíme d, hyder h a saní s.

d, h, s jsou počty zvířat v krabičce, takže jde o přirozená čísla (kladná, celá).

Z počtu křídel a ocasů jednotlivých zvířat a celé krabičky můžeme sestavit dvě rovnice:

- Počet křídel: $2 \cdot d + 4 \cdot h + 8 \cdot s = 120$
  Obě strany rovnice můžeme vydělit 2, čímž dostaneme $d + 2 \cdot h + 4 \cdot s = 60$
- Počet ocasů: $3 \cdot d + 0 \cdot h + 1 \cdot s = 14$ Zjednodušíme na $3 \cdot d + s = 14$

Víme, že $s \geq 1$, takže je jen pár možností, kolik může být d, aby $3 \cdot d + s = 14$ mohlo platit. Kdyby totiž $d \geq 5$, byla by levá strana rovnice aspoň 16, což je spor.

- $d = 1$. Potom z $3 \cdot d + s = 14$ dostaneme $3 \cdot 1 + s = 14$, takže $s = 11$. Dále z $d + 2 \cdot h + 4 \cdot s = 60$ dostaneme $1 + 2 \cdot h + 4 \cdot 11 = 60$, takže $h = \frac{15}{2}$. To je spor, jelikož h má být celé.
- $d = 2$. Potom z $3 \cdot d + s = 14$ dostaneme $3 \cdot 2 + s = 14$, takže $s = 8$. Dále z $d + 2 \cdot h + 4 \cdot s = 60$ dostaneme $2 + 2 \cdot h + 4 \cdot 8 = 60$, takže $h = \frac{26}{2} = 13$. Tato možnost vyhovuje všem podmínkám v zadání.
- $d = 3$. Potom z $3 \cdot d + s = 14$ dostaneme $3 \cdot 3 + s = 14$, takže $s = 5$. Dále z $d + 2 \cdot h + 4 \cdot s = 60$ dostaneme $3 + 2 \cdot h + 4 \cdot 5 = 60$, takže $h = \frac{37}{2}$. To je spor, jelikož h má být celé.
- $d = 4$. Potom z $3 \cdot d + s = 14$ dostaneme $3 \cdot 4 + s = 14$, takže $s = 2$. To je spor, jelikož saní má být více než draků.

Zjistili jsme, že celkem má myslivec v krabičce 2 draky, 13 hyder a 8 saní.

Poznámka: Možnosti $d = 1$ a $d = 3$ by šlo vyřadit úvahou, že v rovnici $d + 2 \cdot h + 4 \cdot s = 60$ je pravá strana sudá a $2 \cdot h + 4 \cdot s$ bude vždy sudé, takže d musí také být sudé.

Úloha 4. *Skupinka 12 datlů hraje týmovou hru. Vždy utvoří 2 týmy, každý o 6 ptácích. Kolik nejméně her stačí na to, aby každý hrál s každým alespoň jednou jako spoluhráč?*

Řešení:
Když si každý tým rozdělíme na 2 půlky, vzniknou nám 4 menší jednotky (minitýmy). Během 3 her se může každá vystřídat s všemi zbylými 3 minitýmy v týmu (6 datlů), např. takto:

	1. tým	2. tým
1. hra	1, 2, 3, 4, 5, 6	7, 8, 9, 10, 11, 12
2. hra	1, 2, 3, 7, 8, 9	4, 5, 6, 10, 11, 12
3. hra	1, 2, 3, 10, 11, 12	4, 5, 6, 7, 8, 9

Teď je potřeba dokázat, že to není možné během méně her. To by muselo být v 1 (což ze zadání zjevně není možné), nebo ve 2. Vezměme si 1. datla. 1. datel v první hře hraje s 5 jinými datly. V následující hře (druhé) by tak potřeboval, aby hrál se zbývajícími 6 datly – to by přesáhli počet ptáků na tým, bylo by jich 7.

Úloha 5. Veverka si myslí číslo od 1 do 100. Václavek se snaží uhodnout správné číslo. Dělá to následujícím způsobem. Může tipovat různá čísla a v případě neúspěchu se dozví, jestli si Veverka myslí menší nebo větší. Pokud Václavek tipne číslo menší, tak se nic nestane. Když poprvé tipne číslo, které je větší než Veverčino, tak se opět nic nestane. Pokud by ale podruhé tipnul číslo, které je větší než Veverčino, tak by prohrál. Kolik nejméně pokusů stačí na to, aby Václavek mohl zvolit univerzální postup, jak správné číslo do uvedeného počtu pokusů tipnout, aniž by prohrál (bez ohledu na to, jaké číslo to je)?

Řešení:
Václavek musí na začátek tipnout nějaké menší číslo. Pokud totiž tipnem 50, tak, pokud je správné číslo menší než 50, musí začít tipovat postupně od 1, jinak riskuje, že prohraje. Mohlo by mu to tedy trvat až 50 pokusů. Obecně, když tipne jako první číslo n, tak mu to může trvat n pokusů, pokud je správné číslo menší. Pokud je větší, tak vyřadil prvních n čísel.

Řekněme tedy, že na začátku je pro Václavka optimální tipnout číslo n. Co má dělat, pokud je Veverčino číslo větší? Mohlo by se zdát jako nejlepší tipnout číslo $2n$. Pokud by ale správné číslo bylo $2n-1$, trvalo by mu jeho uhodnutí přesně $n+1$ pokusů. My ale chceme, aby to bylo co nejméně pokusů pro libovolné číslo a tedy je nejlepší, pokud to bude pro každé číslo stejně. Tedy jestliže pro čísla od 1 do n je trvá uhodnutí maximálně n pokusů, tak i pro další by to mělo být n. Proto je vhodnější tipnout $2n-1$. Tímto způsobem pokračujeme dál. Zase tipnul o číslo víc a tedy rozdíl mezi čísly co tipuje musíme zmenšit o 1. Václavek bude tedy postupně tipovat čísla n, $2n-1$, $3n-3$, $4n-6$, $5n-10$. Rozdíly těchto čísel postupně o jedničku klesají, až budou 1. Potřebujeme, aby součet těchto rozdílů byl alespoň 100 (největší číslo, které si může Veverka myslet). Tedy hledáme nejmenší n, aby $n+(n-1)+(n-2)+\cdots+2+1 \geq 100$. Platí $n+(n-1)+(n-2)+\cdots+2+1=\frac{n\cdot(n+1)}{2}$. Proto $\frac{n\cdot(n+1)}{2} \geq 100$. Nejmenší n, které to splňuje, je $n=14$ (to zjstíme např. tipováním).

Proto Václavkovi stačí 14 pokusů. Jako první tipne číslo 14, pokud bude Veverčino číslo menší, začneme postupně tipovat čísla 1, 2, 3, …, pokud je Veverčino číslo větší, tipne číslo $2\cdot 14-1=27$. Pokud je Veverčino číslo mezi 14 a 27, tak bude opět tipovat odspodu čísla 15, 16, … Pokud je větší, tak tipne $3\cdot 14-3=39$. Pokud bude Veverčino číslo stále větší, bude postupně tipovat čísla 50, 60, 69, 77, 84, 90, 95, 99, 100. Pokud někdy bude Veverčino číslo menší, začne tipovat odspodu od naposledy hádaného čísla.

Úloha 6. *Máme krychli, jejíž délka hrany v centimetrech je celočíselná a alespoň 2. Celou jsme ji ponořili do barvy a poté ji rozřezali na centimetrové krychličky. Platí, že:*

- *Datel 1 tvrdí, že krychliček s jednou obarvenou stěnou je dvakrát víc než těch s dvěma obarvenými stěnami,*
- *Datel 2 tvrdí, že krychliček s třemi obarvenými stěnami je třikrát víc než těch s jednou obarvenou stěnou,*
- *Datel 3 tvrdí, že krychliček s dvěma obarvenými stěnami je dvanáctkrát víc než těch s žádnou obarvenou stěnou,*
- *Datel 4 tvrdí, že krychliček s žádnou obarvenou stěnou je osmkrát víc než těch s třemi obarvenými stěnami.*

Pravdu má právě jeden z těchto datlů. Který a jaká je délka hrany původní krychle?

Řešení:
Označme si délku hrany původní krychle v centimetrech n. Kolik máme od každého druhu krychliček?

- Obarvena byla jedna vrstva krychliček na každé straně krychle, neobarvené krychličky tedy před rozřezáním tvořili krychli s hranou $n-2$, dohromady jich tedy je $(n-2)\cdot(n-2)\cdot(n-2)$.
- Na každé stěně původní krychle tvořili krychličky s jednou obarvenou stěnou čtverec o straně $(n-2)$. Dohromady má krychle 6 stěn, takže krychliček s jednou obarvenou stěnou je $6\cdot(n-2)\cdot(n-2)$.
- Na každé hraně původní krychle je $(n-2)$ krychliček s dvěma obarvenými stěnami. Dohromady má krychle 12 hran, takže krychliček s dvěma obarvenými stěnami je $12\cdot(n-2)$.
- Krychličky s třemi obarvenými stěnami se vyskytují pouze v rozích krychle. Těch má krychle osm, takže je celkem 8 takových krychliček (ze zadání víme $n \geq 2$, takže se nemůže stát, že by šlo o 1 krychličku).

Nyní se blíže podívejme, co každý datel říká.

- Datel 1 tvrdí, že krychliček s jednou obarvenou stěnou (těch víme, že je $6\cdot(n-2)\cdot(n-2)$) je dvakrát víc než těch s dvěma obarvenými stěnami (těch je $12\cdot(n-2)$). Když to dáme do rovnice:

$$\begin{aligned} 6\cdot(n-2)\cdot(n-2) &= 2\cdot 12\cdot(n-2) \\ (n-2) &= 4 \\ n &= 6 \end{aligned}$$

  Rovnici jsme na začátku vydělili $(n-2)$. To můžeme udělat, pouze pokud $n \neq 2$. Pokud $n = 2$, tak jsou obě strany rovnice 0, takže to taky platí.
  Datel 1 má pravdu právě tehdy, když $n = 6$ nebo $n = 2$.

- Datel 2 tvrdí, že krychliček s třemi obarvenými stěnami (těch je 8) je třikrát víc než těch s jednou obarvenou stěnou (těch je celočíselný počet). 8 ale není dělitelné 3, takže toto určitě není pravda.

- Datel 3 tvrdí, že krychliček s dvěma obarvenými stěnami (těch je $12 \cdot (n-2)$) je dvanáctkrát víc než těch s žádnou obarvenou stěnou (těch je $(n-2) \cdot (n-2) \cdot (n-2)$). Když to dáme do rovnice:

$$\begin{aligned} 12 \cdot (n-2) &= 12 \cdot (n-2) \cdot (n-2) \cdot (n-2) \\ 1 &= (n-2) \cdot (n-2) && /\sqrt{\ } \text{ (víme } n \geq 2\text{, takže jsou obě strany nezáporné)} \\ 1 &= n-2 \\ n &= 3 \end{aligned}$$

  Rovnici jsme na začátku vydělili $(n-2)$. To můžeme udělat, pouze pokud $n \neq 2$. Pokud $n = 2$, tak jsou obě strany rovnice 0, takže to taky platí.
  Datel 3 má pravdu právě tehdy, když $n = 3$ nebo $n = 2$.

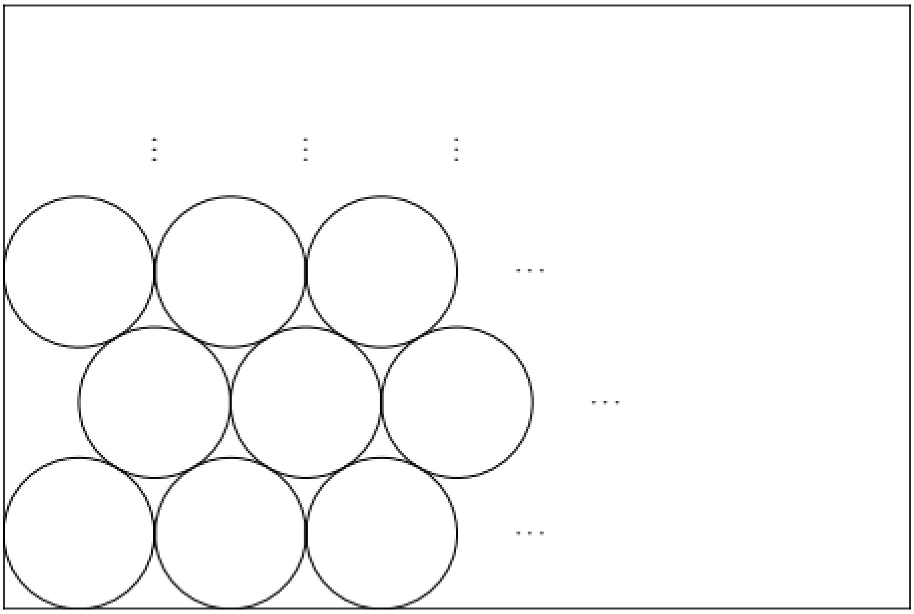
- Datel 4 tvrdí, že krychliček s žádnou obarvenou stěnou (těch je $(n-2) \cdot (n-2) \cdot (n-2)$) je osmkrát víc než těch s třemi obarvenými stěnami (těch je 8). Když to dáme do rovnice:

$$\begin{aligned} (n-2) \cdot (n-2) \cdot (n-2) &= 8 \cdot 8 \\ (n-2) \cdot (n-2) \cdot (n-2) &= 4 \cdot 4 \cdot 4 && /\sqrt[3]{\ } \\ n-2 &= 4 \\ n &= 6 \end{aligned}$$

  Datel 4 má pravdu právě tehdy, když $n = 6$.

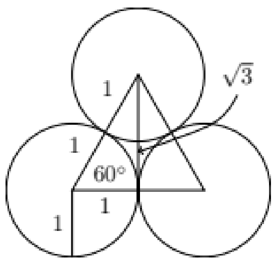
Aby měl pravdu alespoň jeden datel, musí platit $n = 6$, $n = 2$ nebo $n = 3$. Kdyby ale platilo $n = 6$ nebo $n = 2$, budou mít pravdu dva datlové, takže platí $n = 3$ a pravdu mluví datel 3.

Úloha 7. *Mějme papír o rozměrech 28 cm × 21 cm a mince o poloměru 1 cm. Budeme je skládat na papír po řádcích počínaje v levém dolním rohu jako níže na obrázku. Určete, zda se vejde více mincí na papír položený na šířku, nebo na výšku, a spočítejte o kolik.*



Řešení:

Nejprve spočítáme vzdálenost mezi jednotlivými řádky.



Středy tří dotýkajících mincí tvoří rovnostranný trojúhelník o straně 2. Jeho výšku v dopočítáme z Pythágorovy věty:

$$\begin{aligned} 2^2 &= 1^2 + v^2 \\ 4 &= 1 + v^2 \\ v^2 &= 4 - 1 = 3 \\ v &= \sqrt{3} \end{aligned}$$

Vidíme, že vzdálenost mezi řádky je $\sqrt{3}$.

Proto r řádků má na výšku $1+(r-1)\cdot\sqrt{3}+1$ centimetrů. Na výšku 21 cm tedy připadá $r = \lfloor \frac{21-2}{\sqrt{3}} \rfloor + 1 = 11$ řádků, zatímco na výšku 28 cm připadá $r = \lfloor \frac{28-2}{\sqrt{3}} \rfloor + 1 = 16$ řádků.

Při výšce 21 cm a šířce 28 cm má každý lichý řádek $28 : 2 = 14$ mincí, každý sudý pak 13 mincí, celkem je tam tedy $(6 \cdot 14) + (5 \cdot 13) = 149$ mincí.

Při výšce 28 cm a šířce 21 cm má každý řádek $\lfloor 21 : 2 \rfloor = 10$ mincí, celkem je tam tedy $10 \cdot 16 = 160$ mincí.

Více mincí se vleze na papír položený na výšku, a to o 11.