Řešení 1. série

Úloha 1. *Máme 3 čtyřstěnné kostky. Každá z nich má na každé své straně právě jedno písmeno. Větev Václavek si s těmito kostkami hrál následujícím způsobem: kostkami vrhl a z těch tří písmen, která mu padla, zkusil poskládat nějaké smysluplné české slovo v prvním pádu (diakritiku Václavek nezanedbával!). Pokud nějaké šlo složit, tak si ho zapsal. Až potom házel dál. Takto hodil postupně slova PES, LID, SEN, PEC, LED, STO, PUD, LES, RET a NOC. Po posledním hodu, když hodil NOC, divoče ťuklo do kostky s O, která se překlopila a začala ukazovat jiné písmeno. Václavek si ale všiml, že i tak lze z tří písmen, která na něj zírala z kostek, složit smysluplné slovo v prvním pádu. Jaké slovo to bylo? A jak vypadaly kostky?*

Řešení:

Všimněme si, že 3 čtyřstěnné kostky mají celkově 12 stěn a v hozených slovech se vyskytuje právě 12 písmen, každé z těchto písmen bude tedy na právě jedné z těchto 12 stran.

Podívejme se na tyto tři hozená slova: PES, LES, SEN. Všechna obsahují E a S, na dvou kostkách tedy vždy padly tyto stejné strany. Na třetí zbývalé kostce tedy padaly písmena P, L a N. Označme si tuto kostku jako první, kostku s E jako druhou a kostku s S jako třetí.

U slova LED padlo na první kostce L, na druhé opět E a na třetí tedy muselo padnout D. Připišme si tedy písmeno D k třetí kostce. Obdobně ze slova PEC můžeme přiřadit písmeno C k třetí kostce (P a E už jsou přiřazeny k první a druhé kostce). Díky slovu LID přiřadíme písmeno I k druhé kostce, protože L už je na první a D na třetí, stejně tak ze slova NOC můžeme zjistit, že k druhé kostce patří O. Teď ze slova STO zjistíme, že T je čtvrté a poslední písmeno na první kostce (už víme, kde jsou S a O). Zbývají slova RET a PUD. U obou známe dvě ze tří písmen a můžeme tedy třetí přiřadit k té kostce, na které zbývající dvě nejsou - U k druhé kostce a R ke třetí. **Kostky tedy vypadají takto:**

1. **P, L, N, T**
2. **E, I, O, U**
3. **S, D, C, R**

Po posledním hodu byly vrženy písmena N, O a C. Po překlopení kostky s O muselo padnout E, I nebo U, výsledné slovo tedy musela být přesmyčka CEN, CIN nebo CUN. Protože hledáme slovo v prvním pádu a nezanedbáváme diakritiku, **jedinou možností je NIC** (padlo I).

Úloha 2. *Medvěd Xon je dvakrát mladší než medvěd Yon. Medvěd Zon je dvakrát starší než medvěd Yon. Za rok bude věk medvěda Xon prvočíslem, věky medvědů Yon a Zon budou kvadráty. Spočítejte, kolik může být medvědovi Yonovi (všechny možnosti). Všem medvědům je méně než 100 let. Věk je celé kladné číslo. (Hodnotí se hlavně postup a jeho důkladné vysvětlení.)*

Řešení:
Označíme si věk medvěda Yona písmenem y a pomocí něj vyjádříme věky medvědů Xona a Zona:

- Medvěd Xon – $\frac{y}{2}$
- Medvěd Zon – $2 \cdot y$

Vyjádříme si věky medvědů za rok:

- Medvěd Xon – $\frac{y}{2} + 1$
- Medvěd Yon – $y + 1 = a^2$, kde a je z přirozených čísel
- Medvěd Zon – $2 \cdot y + 1 = b^2$, kde b je z přirozených čísel

Pokud všem medvědům je tenhle rok méně než 100 let, bude jim za rok bude méně než 101 let. Víme, že za rok budou některé věky kvadráty, tudíž si vypíšeme všechny kvadráty do 100 (včetně):
1; 4; 9; 16; 25; 36; 49; 64; 81; 100

y musí být dělitelné 2, protože medvěd Xon je dvakrát mladší než medvěd Yon, jehož věk jsme si označili y.

Tudíž musí být y sudé, kvůli tomu bude $y + 1$ liché číslo. Stejně tak číslo $2 \cdot y + 1$ musí být liché ($2 \cdot y$ je sudé).

Kvadráty mají být $y + 1$ a $2 \cdot y + 1$, což musí být lichá čísla, takže omezíme kvadráty do 100 pouze na ty liché:
1; 9; 25; 49; 81

Vyzkoušíme $y + 1$ na kvadrátech:

- $y + 1$ se nemůže rovnat 1, protože y je kladné číslo.
- Pokud $y + 1 = 9$, pak $y = 8$; $2 \cdot y + 1 = 2 \cdot 8 + 1 = 17$, ale 17 není kvadrátem.
- Pokud $y + 1 = 25$, pak $y = 24$; $2 \cdot y + 1 = 2 \cdot 24 + 1 = 49$ a číslo 49 je kvadrátem.
  Ješte zkontrolujeme podmínku, že věk medvěda Xona po roce je prvočíslem: $\frac{y}{2} + 1 = \frac{24}{2} + 1 = 13$ a číslo 13 je prvočíslo, tudíž varianta $y = 24$ splňuje všechny zadané podmínky.
- Pokud $y + 1 = 49$, pak $y = 48$; $2 \cdot y + 1 = 2 \cdot 48 + 1 = 97$, ale 97 není kvadrátem.
- Pokud $y + 1 = 81$, pak $y = 80$; $2 \cdot y + 1 = 2 \cdot 80 + 1 = 161$, ale 161 není kvadrátem.

Medvědovi Yonovi může být 24 let a jiná varianta neexistuje. Všechny ostatní varianty jsme vyloučili kvůli nesplnění některé ze zadaných podmínek.

Úloha 3. *Zjistěte cifry a, b, c, d z rovnice, která je v* ***osmičkové*** *soustavě (a, b, c, d jsou navzájem různá čísla).*

$$\begin{array}{cccc} & a & a & a \\ + & a & c & a \\ \hline d & c & d & b \end{array}$$

(Nápověda: více o osmičkové soustavě např. zde: matweb.cz/prevod)

Řešení:

Čísla a, b, c, d jsou v osmičkové soustavě, tedy od 0 do 7.

Jaké jsou možné hodnoty d? Když sčítáme 2 čísla mezi 0 a 7, nedostaneme více než 16 v osmičkové soustavě. Proto nejpravější sloupec nemohl přenést do druhého sloupce zprava větší hodnotu než 1. Tam opět sčítáme 2 čísla mezi 0 a 7, s přenesenou jedničkou nemůžou mít větší součet než 17, tedy do dalšího sloupce se opět přenese maximálně 1. V třetím sloupci zprava opět sčítáme 2 čísla mezi 0 a 7, s přenesenou jedničkou nemůžou mít větší součet než 17, tedy do dalšího sloupce se opět přenese maximálně 1. To znamená, že d je maximálně 1. První cifra čísla nemůže být 0, takže platí $d = 1$.

Máme tedy rovnici $\begin{array}{cccc} & a & a & a \\ + & a & c & a \\ \hline 1 & c & 1 & b \end{array}$

Z třetího sloupce zprava vidíme, že $a + a + x = 8 + c$ (kde x značí 0 nebo 1 – podle toho, jestli sloupec vpravo dal součet větší nebo menší než 8). Z prvního sloupce zprava vidíme, že $a + a = y + b$ (kde y značí 0 nebo 8 – podle toho, jestli je součet tohoto sloupce větší nebo menší než 8). Kdyby $x = 0$, platilo by $8 + c = a + a = y + b$. To je spor, jelikož b, c jsou různé, ale zároveň se liší o méně než 8 (jsou to obojí cifry v 8-soustavě). Proto $x = 1$, neboli $a + a + 1 = 8 + c$. Kdyby $y = 0$, tak $a + a = b$, takže $8 + c = a + a + 1 = b + 1$, neboli $7 + c = b$. Jelikož b, c jsou cifry v 8-soustavě, muselo by $c = 0$, $b = 7$. Víme ale $a + a = b$, takže b je sudé, takže máme spor. Proto $y = 8$, neboli $a + a = 8 + b$.

Víme $a + a = 8 + b$, takže $b = 2 \cdot a - 8$.

Víme $a + a + 1 = 8 + c$, takže $c = 2 \cdot a - 7$

Vidíme $a + a = 8 + b \geq 8$, tedy a je alespoň 4.

Uděláme si tabulku možností, kolik může být a a kolik by v tom případě bylo b, c, d.

a	$b = 2 \cdot a - 8$	$c = 2 \cdot a - 7$	$d = 1$	Závěr
4	0	1	1	Spor – čísla musí být různá
5	2	3	1	Možné řešení – provedeme zkoušku
6	4	5	1	Možné řešení – provedeme zkoušku
7	6	7	1	Spor – čísla musí být různá

Vypadá to, že rovnice bude mít 2 řešení, musíme ale provést zkoušku:

- Levá strana: $aaa + aca = 555 + 535 = 1312$
  Pravá strana: $dcdb = 1312$ Našli jsme řešení!
- Levá strana: $aaa + aca = 666 + 646 = 1534$
  Pravá strana: $dcdb = 1514$ Toto není řešení.

Jediné řešení je $a = 5$, $b = 2$, $c = 3$, $d = 1$.

Úloha 4. *Kolika způsoby se lze dostat z políčka v levém dolním rohu tabulky 5×5 do políčka v pravém horním rohu? Můžeme se pohnout pouze do políčka, se kterým naše políčko sdílí horní hranu, pravou hranu nebo pouze pravý horní roh. Zároveň do políčka uprostřed tabulky není možné vstoupit.*

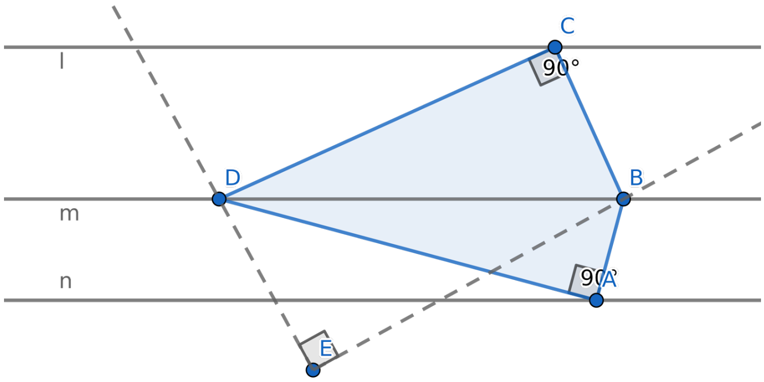
Řešení:
Spočítáme, kolika způsoby se lze dostat do každého políčka tabulky. Do nějakého konkrétního políčka se můžeme dostat z políček, se kterými naše políčko sdílí dolní hranu, levou hranu nebo levý dolní roh. Počet způsobů, jak se do tohoto políčka dostat, bude proto součet počtu způsobů, jak se dostat do těchto tří políček. Tabulku 5×5 si nakreslíme a do každého políčka zapíšeme, kolika způsoby se lze do něho dostat. Do políčka vlevo dole se dá dostat jen jedním způsobem - už tam stojíme a nikdy se nemůžeme vrátit.

1	9	28	64	152
1	7	12	24	64
1	5		12	28
1	3	5	7	9
1	1	1	1	1

Po vyplnění tabulky zjistíme, že odpověď je 152.

Úloha 5. *Jsou dány body A, B, C, D tvořící čtyřúhelník $ABCD$ a 3 rovnoběžky l, m, n takové, že $|lm| = 3$ cm, $|mn| = 2$ cm, $|ln| = 5$ cm. Bod A leží na přímce n, body B, D leží na přímce m a bod C leží na přímce l. $|\sphericalangle DAB| = 90°$, $|\sphericalangle DCB| = 90°$, obsah čtyřúhelníka $ABCD$ je 20 cm^2.*
Jaký je poloměr kružnice opsané trojúhelníku CDE pro libovolný bod E takový, že $|\sphericalangle DEB| = 90°$?
(Nápověda: zjistěte si něco o Thaletově větě nebo o vlastnostech tětivového čtyřúhelníku)

Řešení:



Čtyřúhelník ABCD má součet protilehlých úhlů ($\sphericalangle DAB, \sphericalangle DCB$) 180°, tedy se jedná o tětivový čtyřúhelník – tj. čtyřúhelník, jehož všechny vrcholy leží jedné kružnici, označme si ji k. K tomuto se dá dospět i pomocí Thaletovy věty – body A a C svírají nad BD pravý úhel, tedy oba leží na Thaletově kružnici nad BD.

Stejným způsobem lze dokázat, že na kružnici k leží i bod E.

Všechny vrcholy trojúhelníku CDE leží na této kružnici, tedy je k jeho kružnicí opsanou. Průměr k je např. DB.

Délku úsečky DB vypočítáme z obsahu čtyřúhelníku $ABCD$. Ten lze vypočítat jako součet obsahů trojúhelníků ABD a BCD. Abych z toho získal délku úsečky DB, musím obsah vypočítat jako:

$$S = |DB| \cdot \frac{v_c}{2} + |DB| \cdot \frac{v_a}{2}$$
$$S = |DB| \cdot \frac{v_c + v_a}{2}$$
$$|DB| = \frac{S}{\frac{v_c+v_a}{2}}$$
$$|DB| = \frac{2S}{v_c + v_a}$$

Dosadím:

$$|DB| = \frac{2 \cdot 20\,\mathrm{cm}^2}{3\,\mathrm{cm} + 2\,\mathrm{cm}} = \frac{40\,\mathrm{cm}^2}{5\,\mathrm{cm}} = 8\,\mathrm{cm}$$

A poloměr k je $\frac{|DB|}{2} = 4\,\mathrm{cm}$.

Úloha 6. *Ve čtyřúhelníku je 1234 kuliček. Veverka s Pytloušem hrají hru, při které se střídají v tazích. V prvním tahu Veverka rozdělí kuličky na dvě hromádky (v každé z nich musí být alespoň jedna kulička). V každém dalším tahu si hráč na řadě vybere jednu ze dvou hromádek, které mu jeho soupeř nechal, a rozdělí ji opět na dvě hromádky (v každé z nich musí být alespoň jedna kulička). Hromádka kuliček, kterou si nevybral, se odebere ze hry.*
Prohrává ten hráč, který nemůže dokončit svůj tah. Jeden z hráčů má výherní strategii (dokáže vždy vyhrát, bez ohledu na to, jak hraje ten druhý). Určete, jestli je to Veverka nebo Pytlouš.

Řešení:
Všimněme si, že vybrat si jednu ze dvou hromádek se dá vždy, takže pokud někdo nemůže dokončit svůj tah, tak to musí být kvůli tomu, že nedokáže rozdělit hromádku, co si vybral. To nastane právě tehdy, pokud si vybere hromádku s jednou kuličkou (jinak jí vždy dokáže rozdělit).

Ukažme, že Veverka může hrát tak, že si ve všech svých tazích (kromě toho prvního) dokáže vždy vybrat hromádku se sudým počtem kuliček. Veverka začíná s 1234 kuličkami, což je sudé číslo, takže je může rozdělit na dvě hromádky s lichými počty kuliček. Pytlouš je potom donucen vybrat si hromádku s lichým počtem kuliček. Pokud chceme vyjádřit liché číslo jako součet dvou celých čísel, pak je právě jedno sudé a právě jedno liché. Pokud tedy Pytlouš rozdělí svou vybranou hromádku (s lichým počtem kuliček) na dvě další, potom bude jedna z nich mít sudý počet kuliček. Veverka si ji může vybrat a zase rozdělit na dvě hromádky s lichými počty kuliček atd. Opakováním tohoto postupu si Veverka může ve všech dalších svých tazích opět vybrat hromádku se sudým počtem kuliček. Veverka tedy může hrát tak, že si nikdy nevezme hromádku s lichým počtem kuliček. Nevezme si potom ani hromádku s jednou kuličkou, takže neprohraje.

Po každém tahu se ze hry vyřádí hromádka kuliček, ve které alespoň jedna kulička, takže počet kuliček ve hře při každém tahu klesne alespoň o jedna. Na začátku máme jen konečný poćet kuliček, a protože kuliček ve hře nemůže být záporný počet, musí hra vždy skončit bez ohledu na to, jak Veverka s Pytloušem hrají. Konec hry znamená to, že některý z hráčů už dál nemůže hrát, a tedy prohraje. Dokázali jsme, že to nemůže být Veverka (pokud se snaží), takže prohraje Pytlouš a Veverka vyhraje.

Výherní strategii má Veverka.

Úloha 7. *Mějme n různých zlomků s kladnými čitateli i jmenovateli. Vytvoříme nový zlomek, jehož čitatelem bude součet čitatelů všech n zlomků a jmenovatelem bude součet jmenovatelů těchto n zlomků. Dokažte, že nově vytvořený zlomek bude vždy větší než nejmenší z původních zlomků, ale menší než největší z nich.*

Řešení:

Mějme n zlomků tvaru:

$$\frac{a_1}{b_1}, \frac{a_2}{b_2}, \frac{a_3}{b_3}, \ldots, \frac{a_n}{b_n},$$

kde $a_1, a_2, \ldots, a_n, b_1, b_2, \ldots, b_n$ jsou kladná čísla.

Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat:

$$\frac{a_1}{b_1} < \frac{a_2}{b_2} < \frac{a_3}{b_3} < \cdots < \frac{a_n}{b_n} \quad (1)$$

Chceme dokázat, že platí:

$$\frac{a_1}{b_1} < \frac{a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n}{b_1 + b_2 + b_3 + \cdots + b_n} < \frac{a_n}{b_n}$$

Z (1) plyne:

$$\begin{aligned}
\frac{a_2}{b_2} &> \frac{a_1}{b_1} \quad \text{upravíme:} \quad a_2 > b_2 \cdot \frac{a_1}{b_1} \\
\frac{a_3}{b_3} &> \frac{a_1}{b_1} \quad \text{upravíme:} \quad a_3 > b_3 \cdot \frac{a_1}{b_1} \\
&\vdots \\
\frac{a_n}{b_n} &> \frac{a_1}{b_1} \quad \text{upravíme:} \quad a_n > b_n \cdot \frac{a_1}{b_1}
\end{aligned}$$

Tyto nerovnice sečteme:

$$\begin{aligned}
a_2 + a_3 + \cdots + a_n &> (b_2 + b_3 + \cdots + b_n) \cdot \frac{a_1}{b_1} && / + a_1 \\
a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n &> (b_2 + b_3 + \cdots + b_n) \cdot \frac{a_1}{b_1} + a_1 && \text{upravíme} \quad a_1 = b_1 \cdot \frac{a_1}{b_1} \\
a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n &> (b_2 + b_3 + \cdots + b_n) \cdot \frac{a_1}{b_1} + b_1 \cdot \frac{a_1}{b_1} \\
a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n &> (b_1 + b_2 + b_3 + \cdots + b_n) \cdot \frac{a_1}{b_1} && / : (b_1 + b_2 + b_3 + \cdots + b_n) \\
\frac{a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n}{b_1 + b_2 + b_3 + \cdots + b_n} &> \frac{a_1}{b_1}
\end{aligned}$$

Poslední úpravu jsme mohli provést, jelikož $b_1, b_2, \ldots, b_n$ jsou kladná čísla, tedy i jejich součet je kladný.

Získali jsme část nerovnice, kterou jsme měli dokázat.

Analogicky dokážeme, že platí i

$$\frac{a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n}{b_1 + b_2 + b_3 + \cdots + b_n} < \frac{a_n}{b_n}$$

Tedy opravdu platí

$$\frac{a_1}{b_1} < \frac{a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n}{b_1 + b_2 + b_3 + \cdots + b_n} < \frac{a_n}{b_n}.$$