

Zadání páté série

Termín odevzdání: 22. dubna

„Teďka ale už vážně. Nepřijde vám to celý divný?“ divil se Tomáš, „Celý den tady běháme a nic z toho. Všichni jsme ztraceni a zmatení. Najednou ta raketa má rozlohu jak šest fotbalových hřišť.“ Všichni se na něj jenom dívali. Nic neříkali. Tomáš pokračoval: „Dobře, i kdyby ta raketa byla v pořádku, proč je tady tolik zbytečných místností? Proč je ŘIM tak nekonzistentní a proč se nezabýváme naším úkolem?“ Najednou začala Tamara něco huhňat. Tomáš se na ni otočil a ptá se: „Cos říkala?“ Tamara ale nemluvila česky.

Úloha 0. *Napište, jakým jazykem Tamara mluvila a co řekla.*

„Aha,“ podivil se Tomáš „co se člověk nedozví...“ Všechno se najednou začalo točit a blikat červenou, zelenou, žlutou i modrou barvou. Lidé se najednou změnili ve stěny a Tomáš stál uvnitř barevně blikající krychle. Jen na podlaze byla tabulka.

Úloha 1. *Vybarvi každou buňku tabulky jednou z barev (červená, zelená, žlutá a modrá) podle pokynů v jednotlivých buňkách.*

	A	B	C	D
1	<i>Tato barva je v celé tabulce třikrát</i>	<i>Modrých buněk je stejně jako zelených</i>	<i>Buňka vlevo od této je žlutá</i>	<i>Tato buňka má stejnou barvu jako B2</i>
2	<i>Jaká je barva této buňky? :)</i>	<i>Tato buňka sousedí každým rohem s jinou barvou</i>	<i>Dvě červené buňky spolu nikdy nesousedí stranou</i>	<i>Tato barva je v tabulce celkem čtyřikrát</i>
3	<i>Buňka pod touto není zelená ani žlutá</i>	<i>V tomto řádku se jako v jediném nachází všechny barvy</i>	<i>Tato buňka je červená</i>	<i>Tato barva se nachází ve dvou navzájem protilehlých rozích tabulky (do úhlopříčky)</i>
4	<i>Tato barva se nenachází v prvním řádku</i>	<i>Tato buňka má stejnou barvu jako buňka vpravo od ní</i>	<i>V tomto řádku ani sloupci se nenachází modrá</i>	<i>Tato buňka sousedí stranou s právě jednou buňkou téže barvy</i>

„Co se to děje?!“ zoufale zakřičel Tomáš. „Proč to vypadá jak úniková hra? Tak já to vyřeším. Tady modrá, tady žlutá a mám to! Hele, číslo! Když tolikrát tlesknu, tak se třeba posunu dál.“ Po pár tlesknutích se ale pořád nic nestalo, takže začal panikařit: „Co mám dělat?“ Začaly se mu třást ruce. Minimálně hodinu seděl na zemi uprostřed místnosti. Najednou něco uslyšel: „Húúúúúúúúúúúúúúúú, húúúúúúúúúúúúúúúú...“ Tomáš vyskočil: „Co se děje?“ „Jaký úhel je větší? Jaký úhel je větší? Jaký úhel je větší?“ začalo se ozývat z repráku. „Co dělám ve vlaku?“ podivil se Tomáš „A jaký úhly čeho? Co? A proč se to pořád ptá?“ Před Tomášem zastavil vozík s jídlem. Na něm byl velký kulatý čokoládový dort. Pod táckem ležel papír s nákresem.

Úloha 2. Máme obdélník $ABCD$ a bod E na straně AB . Platí, že $2 \cdot |AE| = |EB|$ a víme, že poměr stran obdélníka je $2 : 3$. Určete, jestli je větší úhel AED nebo úhel CED .
(Nápověda: úhel $|ADE|$ lze spočítat jako $\arctg \frac{1}{2}$, což je zhruba $26,57^\circ$)

„A teď co jako? Zase tady budu trpět a probudím se někde jinde. To je k vzteku. Alespoň ten reprák přestal,“ stěžoval si Tomáš. „Dobrý den, můžeme si přisednout?“ zeptala se neznámá osoba. „Samozřejmě,“ odpověděl bez váhání Tomáš, načež si k němu přisedli tři lidé. „Takže já jsem Francouz, toto je herec a naproti mně sedí nezaměstnaný. Kromě toho jsme všichni lichváři a půjčujeme si navzájem.“

Úloha 3. Tři osoby (Francouz, herec a nezaměstnaný) si v průběhu půl roku půjčovaly šilinky. Poplatek za půjčku činí 1 šilink, neboli při vracení peněz musí ten, kdo si půjčoval, zaplatit za každou půjčku o 1 šilink více, než kolik si půjčil šilinků. Kolik kdo komu má na konci splatit tak, aby se splácelo co nejméně peněz, tedy peníze šly přímo tomu, komu chybí (zatím nikdo nic nevrátil)? Víme, že:

- v 1. měsíci Francouz půjčoval 21 šilinků, z toho $\frac{2}{3}$ herci a $\frac{1}{3}$ nezaměstnanému,
- v 2. měsíci si herec půjčoval 42 šilinků, a to $\frac{2}{7}$ z toho od Francouze a $\frac{5}{7}$ od nezaměstnaného,
- v 3. měsíci nezaměstnaný půjčoval 33 šilinků, z toho $\frac{8}{11}$ Francouzi a $\frac{3}{11}$ herci,
- v 4. měsíci herec půjčoval 35 šilinků, z toho $\frac{3}{5}$ Francouzi a $\frac{2}{5}$ nezaměstnanému,
- v 5. měsíci si Francouz půjčoval 28 šilinků, a to $\frac{3}{4}$ od herce a $\frac{1}{4}$ od nezaměstnaného,
- v 6. měsíci si nezaměstnaný půjčoval 24 šilinků, a to $\frac{5}{6}$ od Francouze a $\frac{1}{6}$ od herce.

„Takže takhle vypadá vaše finanční situace,“ spočítal jim to Tomáš. „Děkujeme. Vstupte prosím do mého kufříku,“ odpověděl Francouz a pokynul ke svému pestrobarevnému zavazadlu. Tomáš odevzdaně skočil šipku do neznáma. Najednou se objevil před velkými digitálními hodinami. Vždycky, když se na ně podíval, vyply se. „Co to je za divný hodiny? Nejsou zbytečný, když mi nechcou ukázat čas?“ „My nejsme zbytečný! My ti to řekneme! Ale musíš zapojit mozek!“ ozval se hlas. „Teďka na mě mluví hodiny, že?“ Odpovědi se nedočkal. Podmínek ano.

Úloha 4. Máme digitální hodiny zobrazující hodiny, minuty a sekundy, ve formátu $hh:mm:ss$. Zobrazují nějaký platný čas, o kterém víme následující informace:

- Ještě nebylo poledne.
- Některá cifra je na hodinách alespoň třikrát.
- Někde na hodinách je číslice 6.
- Cifra nejvíc vpravo na hodinách je 5 (tedy hodiny zobrazují $hh:mm:s5$).
- Cifra druhá zprava na hodinách není 0 (tedy hodiny nezobrazují $hh:mm:0s$).
- Některá z dvojic hodiny-minuty, hodiny-sekundy a minuty-sekundy je stejná (tedy hodiny zobrazují $xy:xy:ab$, $xy:ab:xy$ nebo $ab:xy:xy$).

Jaký čas zobrazují hodiny?

„Tak to je nejvyšší čas mě posunout dál, ne?“ zasmál se Tomáš. „Ne, zde je tvůj další úkol!“ zakřičely hodiny. Ozvala se velká rána. Všechno kolem zmizelo a z temnoty se vynořil malý meč. „Co mám dělat s takovou hračkou?“ podivil se Tomáš. Meč najednou začal měnit objem.

Úloha 5. *Meč se postupně zvětšuje opakujícím se cyklem, který se skládá ze tří částí jdoucích po sobě:*

1. *Meč se prodlouží o 5 cm,*
2. *meč se prodlouží o 10 %,*
3. *meč se zkrátí o 2 cm.*

Odpovězte na následující otázky:

- *Jak dlouhý bude meč po 5 cyklech, pokud měl na začátku 10 cm?*
- *Jak dlouhý bude meč po prvním cyklu, pokud měl na začátku délku x ?*
- *Jak vypadá obecný vzorec pro délku meče, který měl na začátku délku x , po n cyklech?*

„Hele, ten meč už není nejmenší,“ podivil se Tomáš. „Dobrý den, mé jméno je Mečík Střechovitý. Toto jsou mí přátelé. S těmi se už znáte.“ Tomáš byl v šoku. Z meče se totiž stala kytka, začala mluvit a z podlahy vyrostli Francouz, herec a nezaměstnaný. „Pojď se s námi projít k místnímu občerstvení. Všichni si dáme tričko až na tebe,“ začali si prozpěvovat. Tomáš v absolutním zoufalství přikývnul a následoval ty entity.

„Co si dáš, Tomáši?“ zeptal se Francouz přibližně 26 metrů před stánkem s občerstvením. „Nevím, co tam mají,“ odpověděl mu Tomáš. „Tak se pojdme podívat,“ řekl radostně nezaměstnaný.

„Dobrý den, co si dáte?“ vyptával se mluvící párek ze stánku, „Máme dvě zmrzliny a dvě ledové tříště.“

Úloha 6. *Francouz, herec, nezaměstnaný a Mečík si koupili každý jiné občerstvení (k dispozici byla zmrzlina s malinovou příchutí, zmrzlina s limetkovou příchutí a dvě ledové tříště také v malinové či limetkové podobě). Každý u toho měl jinou barvu trička (modrou, zelenou, červenou nebo černou) a žádní dva si neobednávali současně, přišli tedy ke stánku v nějakém pořadí (1. až 4.). Víme, že:*

- *Ti dva, kteří si koupili tříšť, nepřišli hned po sobě a to samé platí pro ty dva, co si dali zmrzlinu,*
- *Francouz si dal malinovou zmrzlinu a nepřišel poslední,*
- *herec přišel až někdy po nezaměstnaném, ale přišel někdy před Mečíkem,*
- *ten, kdo si dal limetkovou zmrzlinu, buď přišel první, nebo měl modré tričko,*
- *pokud nezaměstnaný přišel jako poslední, dal si malinovou tříšť, ale pokud nepřišel poslední, tak si ji nedal,*
- *ti dva, kteří si dali něco malinového, neměli černé tričko a nepřišli poslední*
- *Mečík buď měl modré tričko, nebo přišel první,*
- *nezaměstnaný si dal tříšť,*
- *ani jedna z osob, které si daly zmrzlinu, neměla tričko začínající na měkkou souhlásku.*

Pokud navíc víme, že si herec dal tříšť, lze určit přesně kdo se čím občerstvil, jakou měl barvu trička a v jakém pořadí kdo přišel? Pokud ano, tak to všechno zjistěte.

„Tomáši, nespí. Na to máš realitu. Teď jsi ve snu,“ začal mluvit Mečík na skoro spícího Tomáše. „Já to nezvládám. Kde to jsem, co mám dělat, jak se odtud mám dostat? Já přece nespím. Celá tato mise se mi snad nezdála, ne?“ „Zdála. Usnul jsi, ale probudíš se, to se neboj. Aby ses probudil, musíš vypočítat ještě poslední příklad,“ říká Mečík a podává Tomášovi hrstku čísílek.

Úloha 7. *Dokažte, že existuje 10000 po sobě jdoucích kladných celých čísel, mezi kterými je právě 42 druhých mocnin nějakých celých čísel (není nutné je najít, stačí dokázat jejich existenci i jinak).*

„DOBRÉ RÁNO!“ probudil Tomáše Míšin sametový hlas, „Nějak jsi nám tu usnul. Co se ti asi zdálo?“ „Míšo, tomu neuvěříš.“