

Zadání čtvrté série

Termín odevzdání: 25. března

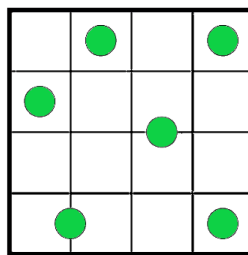
„Už jsem našla dveře ke skladu!“ ozval se slabý hlásek patřící nejspíše Tamaře. „Tak musím jít na místo určené“ povzdechl si Tomáš a vydal se za nosem. „Teďka doprava, nebo doleva? Zkusím jít doleva a třeba tam dojdu,“ pomyslel si Tomáš. Na křižovatce zahrnul doleva, pak chvíli šel. „Ha! Vidím tě! Stůj!“ zavolal Tomáš, když zpozoroval Helenu. Ta se otočila. Nepřítomně se podívala někam za Tomáše a upadla. Tomáš se k ní rozběhl. Zeptal se jí: „Je všechno v cajku?“

Úloha 0. *Co odpověděla Helena Tomášovi?*

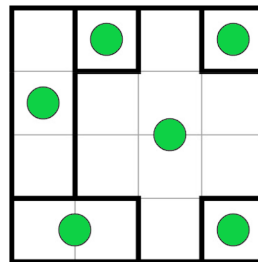
Tomáš pomohl Heleně na nohy a šli společně dál hledat místnost. „Počkej, tady jsme měli zahrnout doprava, ne?“ zeptala se Helena. „Hele, já nevím. Jakože vůbec. Když to říkáš, tak jsme asi měli,“ odpověděl Tomáš. „Ale ale. Co to nevidím. Nejsou to náhodou dveře?“ Oba dva dokráčeli ke dveřím. Když je otevřeli, neviděli kruhovou, ale čtvercovou místnost s unikátním osvětlením.

Úloha 1. *Následující mřížku rozdělte do několika oblastí. Každé světlo v mřížce přísluší právě jedné oblasti. Každá oblast obsahuje právě 1 světlo a je podle tohoto světla středově souměrná.*

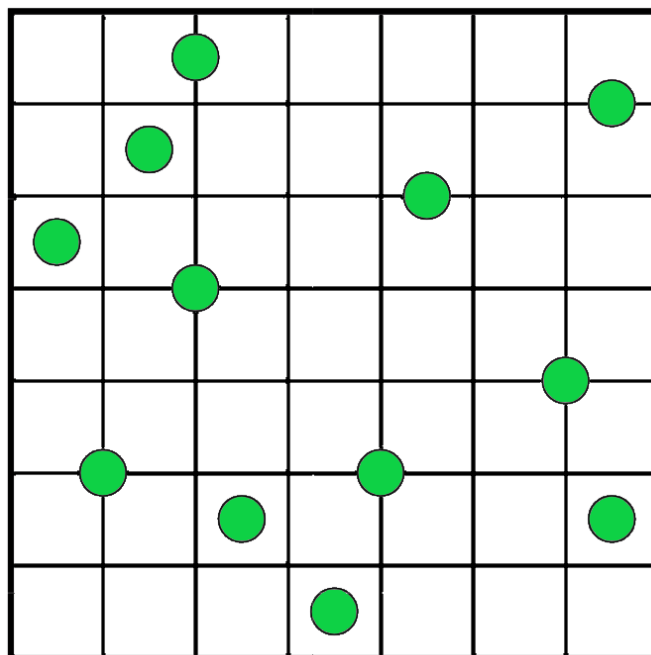
Příklad:



Příklad řešení:

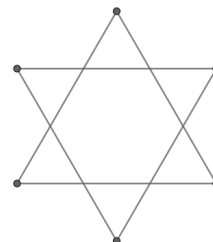


Vaše zadání:



Po chvíli ticha Tomáš nevtipně poznamenal: „Necítím se být expertem na místnosti v této raketě, ale toto není naše místnost.“ Helena se na něj chvíli nevěřičně dívala, než mu odpověděla: „Není, no. Hele, tak pojďme zpátky. Ať se tam konečně už dostaneme.“ „Ne, počkej, tady se to dá projít, tak se tam určitě dostaneme. Jestli to nevyjde, přenechám velení tobě.“ „Dobře. Zoufalá doba si žádá zoufalé činy.“ Tomáš vyrazil napřed. Prošli čtvercovou místností a podívali se, co se skrývá za ní. „Tudy cesta nevede. Další špatná místnost. Tentokrát s hexagramem.“

Úloha 2. Hexagram vznikne sjednocením dvou shodných rovnostranných trojúhelníků s těžištěm ve stejném bodě, navzájem pootočených o 60 stupňů. Kolem hexagramu je obdélník, který se svými hranami dotýká všech šesti cípů tohoto hexagramu.



1. Jaký je poměr obsahu obdélníku ku obsahu hexagramu uvnitř?
2. Jaké délky stran by měl obdélník, aby byl zachován poměr stran jako v původním obdélníku a měl stejný obsah jako daný hexagram?

„Velení je tvé,“ předal Tomáš pomyslné žezlo Heleně. Otočili se a společně se vydali zpět někam, kde to znají. „Tady jsme už byli, takže zahneme druhým směrem,“ rozhodla Helena. Tomáš mlčky přikývl a šli dál. Tomáš se najednou zastavil a začal zkoumat plakát na stěně. Helena se k němu po chvíli osamocené chůze vrátila a plakát obdivovala s ním. Na plakátu stálo:

Úloha 3. Dokažte, že součet tří po sobě jdoucích mocnin čísla 4 s přirozeným exponentem je vždy dělitelný 7. (Např. výraz $4^1 + 4^2 + 4^3$ je dělitelný 7.)

„Proč tu vůbec něco takového visí?“ podivil se Tomáš. „To nevím,“ odpověděla Helena, frustrovaná jejich neschopností najít velkou místnost plnou lidí. „Ha! Slyším hlasy, pojďme tam,“ rozzářila se Helena. Oba dva se entuziasticky vydali tím směrem a po chvíli ostatní opravdu našli. „Co to hraješ, Dušane?“ zeptal se Tomáš. „No, jen nějakou skákačku.“

Úloha 4. Na podlaze je dlouhá řada políček a Dušan po nich skáče. Vždy své skákání začíná na prvním políčku a pak vždy buď skočí hned na to následující nebo jedno políčko úplně přeskočí a dopadne až na to další. Tomáše tohle skákání zaujalo. Ke každému políčku napsal, kolika způsoby tam Dušan mohl doskákat. Jaké číslo napsal na políčko, které je mezi políčky s čísly 2584 a 6765?

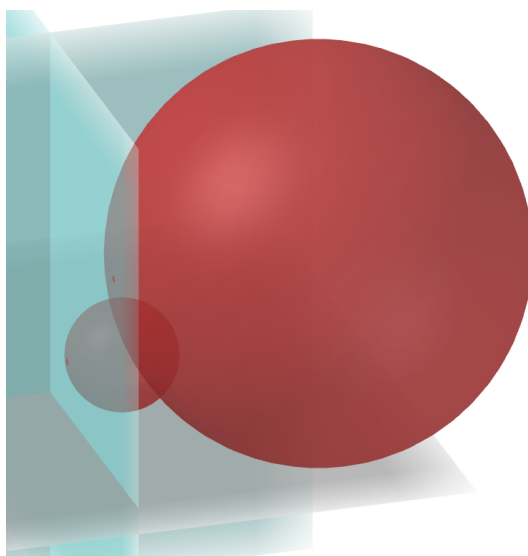
„To je taková blbost. Na to bych neměla nervy,“ poznamenala Helena. Chvíli bylo v místnosti ticho. Najednou se ozval hlasitý zvuk podobný jelenímu troubení. „Šlo ti to hezky, Dušane. Do teď...“ vysmála se mu nenápadně Tamara. „Když už jsi tedy spadnul a prohrál, pojď si zahrát šachy.“

Úloha 5. Mějme nekonečnou šachovnici, na které jsou rozestavěny figurky, z nichž každá má na sobě napsaná dvě přirozená čísla n a m . Každá figurka se může hýbat následujícím způsobem: vždy vyskočí do vzduchu, natočí se jedním ze čtyř hlavních směrů (nahoru, dolů, doleva nebo doprava), posune se o n políček, poté se otočí o 90° a posune se o m políček. Až po tomto druhém posunutí figurka opět dopadne na šachovnici. Pro danou figurku se čísla n a m nemění, ovšem pro různé figurky mohou být tato čísla různá. Figurka s čísly $n = 2$ a $m = 1$ by vlastně fungovala úplně přesně jako klasický šachový kůň.

Které šachové figurky (tedy s kterými n, m) jsou schopné dříve nebo později doskákat na jakémkoliv políčko na nekonečné šachovnici? Najděte všechny možnosti a dokažte, žádná jiná figurka to nedokáže.

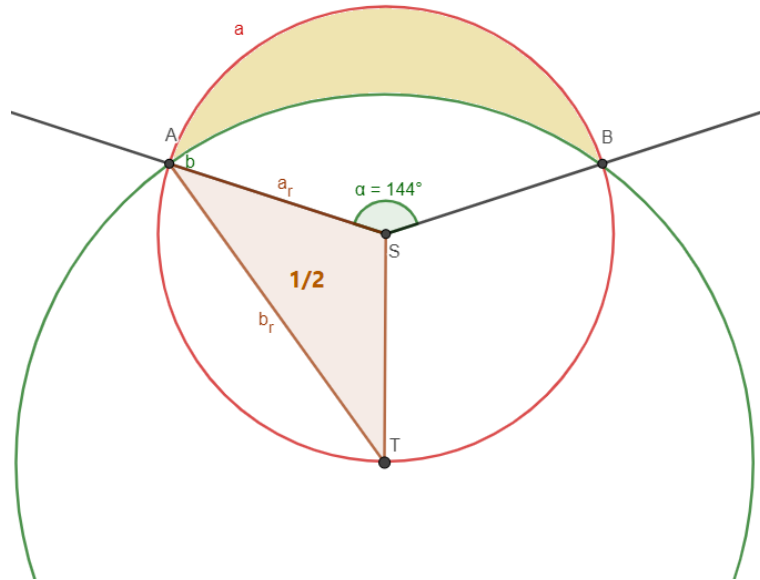
„Běž radši hrát tu skákačku. To ti šlo lépe,“ vysmála se (tentokrát okatě) Tamara Dušanovi, když ho potřetí v řadě porazila. „Dej pokoj. V podstatě jsem vyhrál,“ brblal Dušan, „a proč tady vlastně vůbec ještě jsme? Pojďme do skladu.“ „Chybí Matěj s Bárrou,“ poznamenal Tomáš a všichni zmlkli. Náhlé ticho přerušil Michalův hlas z rohu místnosti: „Nenávidím koule.“

Úloha 6. *V pravouhlém rohu místnosti jsou dvě koule tak, že se obě dotýkají všech tří stěn a koule se navzájem neprotínají (viz obrázek). Jaký největší poloměr může mít menší z nich, jestliže ta větší má poloměr r ?*

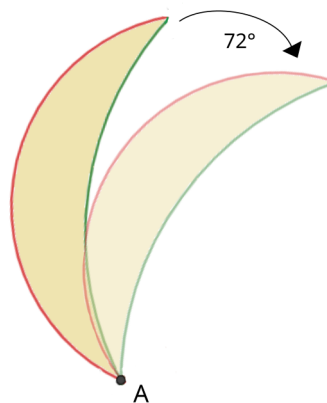


Všichni vyprskli smíchy. Vtom se přihlítil Matěj s Bárrou. „Máme neuvěřitelně mnoho otázek. Proč je tady tolik zbytečných místností? Proč nemáme mapu nebo nám v navigaci nepomáhá ŘIM? Jak je možné, že v tak malé raketě je možné se ztratit? Nebyla ta raketa zvenku menší? Proč existuje místnost s koulemi? Na co jsou koule v raketě? Jdeme hledat nové planety, nebo ne? A víte, která místnost byla nejhorší? Místnost s měsíčkem!“ vychrlil ze sebe Matěj. „Jak vypadala?“ zeptal se Tomáš.

Úloha 7. Máme dvě kružnice $a(S, a_r)$ a $b(T, b_r)$, které se navzájem protínají ve dvou různých bodech A a B tak, že velikost úhlu $|\sphericalangle ASB| = 144^\circ$. Také platí, že bod T leží na kružnici a a že trojúhelník AST má obsah roven jedné polovině. „Měsíčkem“ nazveme béžově vybarvený útvar vymezený kratšími oblouky AB kružnic a a b . Jaký obsah má „měsíček“? Vyjádřete pomocí a_r a b_r .



Takto vzniklých „měsíčků“ vezmeme několik a vytvoříme z nich nový obrazec následovně: K prvnímu „měsíčku“ vždy přidáme další otočený okolo bodu A o 72° po směru hodinových ručiček. Takto přidáváme další „měsíčky“ do té doby, až máme vyskládané celé kolo, tj. žádný „měsíček“ nerotujeme o více než 360° od prvního. Jaký obsah má tento útvar vzniklý rotací „měsíčků“?



Nápověda: Nastudujte si, co jsou to obvodové a středové úhly. Jaké dvě přímky vymezují „měsíček“?

POKRAČOVÁNÍ V PŘÍŠTÍ SÉRII