Řešení 5. série

Úloha 1. *Vybarvi každou buňku tabulky jednou z barev (červená, zelená, žlutá a modrá) podle pokynů v jednotlivých buňkách.*

	A	B	C	D
1	*Tato barva je v celé tabulce třikrát*	*Modrých buněk je stejně jako zelených*	*Buňka vlevo od této je žlutá*	*Tato buňka má stejnou barvu jako B2*
2	*Jaká je barva této buňky? :)*	*Tato buňka sousedí každým rohem s jinou barvou*	*Dvě červené buňky spolu nikdy nesousedí stranou*	*Tato barva je v tabulce celkem čtyřikrát*
3	*Buňka pod touto není zelená ani žlutá*	*V tomto řádku se jako v jediném nachází všechny barvy*	*Tato buňka je červená*	*Tato barva se nachází ve dvou navzájem protilehlých rozích tabulky (do úhlopříčky)*
4	*Tato barva se nenachází v prvním řádku*	*Tato buňka má stejnou barvu jako buňka vpravo od ní*	*V tomto řádku ani sloupci se nenachází modrá*	*Tato buňka sousedí stranou s právě jednou buňkou téže barvy*

Řešení:

	A	B	C	D
1	Tato barva je v celé tabulce třikrát	Modrých buněk je stejně jako zelených	Buňka vlevo od této je žlutá	Tato buňka má stejnou barvu jako B2
2	Jaká je barva této buňky? :)	Tato buňka sousedí každým rohem s jinou barvou	Dvě červené buňky spolu nikdy nesousedí stranou	Tato barva je v tabulce celkem čtyřikrát
3	Buňka pod touto není zelená ani žlutá	V tomto řádku se jako v jediném nachází všechny barvy	Tato buňka je červená	Tato barva se nachází ve dvou navzájem protilehlých rozích tabulky (do úhlopříčky)
4	Tato barva se nenachází v prvním řádku	Tato buňka má stejnou barvu jako buňka vpravo od ní	V tomto řádku ani sloupci se nenachází modrá	Tato buňka sousedí stranou s právě jednou buňkou téže barvy

Začneme červenou buňkou na C3 a žlutou na B1 (viz C1). Poté se podíváme na D3: modrá tam být nemůže, protože víme, že modrá se nenachází ani v jednom z rohů čtvrtého řádku (viz C4), tedy nemůže být ve dvou protilehlých rozích. D3 nemůže být ani červená, protože dvě červené spolu nikdy nesousedí stranou (viz C2). D3 je tedy zelená nebo žlutá. Proto dva diagonální rohy jsou oba buď žluté, nebo zelené. Toto se nemůže týkat rohu A4, který není ani zelený, ani žlutý (viz A3). Dva rohy se stejnou barvou jsou tedy určitě A1 a D4. Stejnou barvu jako tyto rohy má i D3, tedy D3, D4 a A1 jsou navzájem jedné barvy (žlutá nebo zelená)

Barvu, kterou má A1, mají celkem tři buňky v tabulce. Kdyby to byla žlutá, tak to nevychází, protože by žluté byly jak A1, D4 a D3, tak i B1. Tedy barva A1, D4 a D3 je zelená, přičemž zelená se v tabulce již vícekrát nezopakuje.

Buňka C4 nemůže být červená (2 červené nesousedí stranou), zelená (ta už v tabulce není) ani modrá (ta v tomto řádku není). Proto je žlutá, stejně jako B4.

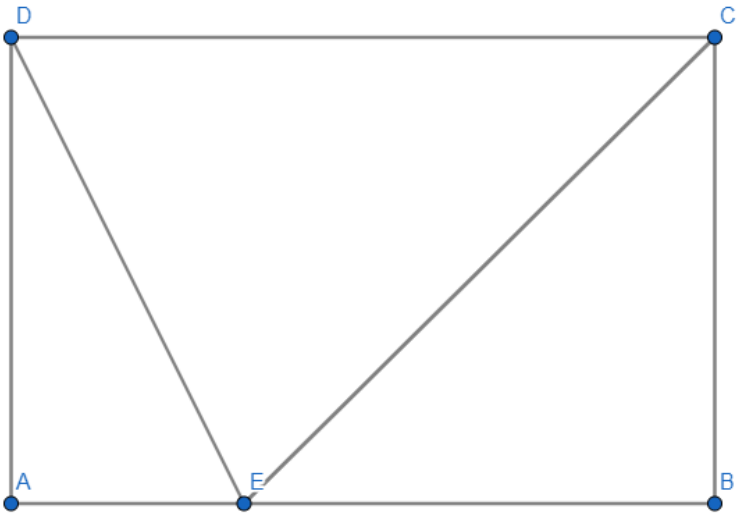
Zaměřme se na B2. Vlevo nahoře sousedí rohem se zelenou, vpravo dole s červenou. S modrou nemůže sousedit na C1, protože v sloupci C není modrá (viz C4). Modrá je tedy na A3 a C1 je žlutá.

Ve třetím řádku už máme všechny barvy kromě žluté, B3 je tedy žlutá. A4 nemůže být modrá (viz C4), ani zelená nebo žlutá (viz A3). A4 je tedy červená. Buňka C2 je žlutá, neboť nemůže byt zelená (ta už v tabulce není), modrá (viz C4), ani červená (červena je buňka pod ní a 2 červené nesousedí stranou). C2 je tedy žlutá.

Podíváme se na D2. Není zelená (ta už v tabulce není), ani žlutá, protože ta už se v tabulce nachází pětkrát. Není ani modrá, protože modrých buněk je stejně jako zelených (viz B1), tedy jsou tři. D2 je proto červená. Zbývá nám určit barvy buněk A2, B2 a D1, přičemž B2 a D1 mají stejnou barvu (viz D1). Modré buňky jsou v tabulce právě 3 (viz B1) a my máme zatím jen jednu, takže B2 a D1 jsou modré. Červené buňky jsou v tabulce 4 (viz D2) a my máme zatím jen 3, takže A2 je červená.

Úloha 2. *Máme obdélník $ABCD$ a bod E na straně AB. Platí, že $2 \cdot |AE| = |EB|$, a víme, že poměr stran obdélníka je $2 : 3$. Určete, jestli je větší úhel AED, nebo úhel CED.*
(Nápověda: úhel $|ADE|$ lze spočítat jako $\operatorname{arctg} \frac{1}{2}$, což je zhruba $26,57°$)

Řešení:



Ze zadaných poměrů víme, že EBC je rovnoramenný trojúhelník, takže $|\sphericalangle ECB| = \frac{180° - 90°}{2} = 45°$. Také víme, že $|\sphericalangle ADE| \doteq 26,57°$, dopočítáním úhlů v trojúhelníku ADE dostaneme $|\sphericalangle AED| \doteq 180° - 90° - 26,57° \doteq 63,43°$. Dále $|\sphericalangle ECD| = 90° - 45° = 45°$. Z toho už můžeme dopočítat $|\sphericalangle CED| \doteq 180° - 63,43° - 45° \doteq 71,57°$.

Víme, že $63,43° < 71,57°$, takže úhel AED je menší než úhel CED.

Úloha 3. *Tři osoby (Francouz, herec a nezaměstnaný) si v průběhu půl roku půjčovaly šilinky. Poplatek za půjčku činí 1 šilink, neboli při vracení peněz musí ten, kdo si půjčoval, zaplatit za každou půjčku o 1 šilink více, než kolik si půjčil šilinků. Kolik kdo komu má na konci splatit tak, aby se splácelo co nejméně peněz, tedy peníze šly přímo tomu, komu chybí (zatím nikdo nic nevrátil)? Víme, že:*

- *v 1. měsíci Francouz půjčoval 21 šilinků, z toho* $\frac{2}{3}$ *herci a* $\frac{1}{3}$ *nezaměstnanému,*
- *v 2. měsíci si herec půjčoval 42 šilinků, a to* $\frac{2}{7}$ *z toho od Francouze a* $\frac{5}{7}$ *od nezaměstnaného,*
- *v 3. měsíci nezaměstnaný půjčoval 33 šilinků, z toho* $\frac{8}{11}$ *Francouzi a* $\frac{3}{11}$ *herci,*
- *v 4. měsíci herec půjčoval 35 šilinků, z toho* $\frac{3}{5}$ *Francouzi a* $\frac{2}{5}$ *nezaměstnanému,*
- *v 5. měsíci si Francouz půjčoval 28 šilinků, a to* $\frac{3}{4}$ *od herce a* $\frac{1}{4}$ *od nezaměstnaného,*
- *v 6. měsíci si nezaměstnaný půjčoval 24 šilinků, a to* $\frac{5}{6}$ *od Francouze a* $\frac{1}{6}$ *od herce.*

Řešení:
Zjistíme přesné hodnoty půjčených peněz od určitých osob a přičteme 1 šilink za půjčení:

- 1. měsíc:
  Francouz půjčil herci: $\frac{2}{3}$ z $21 + 1 = 15$
  Francouz půjčil nezaměstnanému: $\frac{1}{3}$ z $21 + 1 = 8$
- 2. měsíc:
  Francouz půjčil herci: $\frac{2}{7}$ z $42 + 1 = 13$
  Nezaměstnaný půjčil herci: $\frac{5}{7}$ z $42 + 1 = 31$
- 3. měsíc:
  Nezaměstnaný půjčil Francouzi: $\frac{8}{11}$ z $33 + 1 = 25$
  Nezaměstnaný půjčil herci: $\frac{3}{11}$ z $33 + 1 = 10$
- 4. měsíc:
  Herec půjčil Francouzi: $\frac{3}{5}$ z $35 + 1 = 22$
  Herec půjčil nezaměstnanému: $\frac{2}{5}$ z $35 + 1= 15$
- 5. měsíc:
  Herec půjčil Francouzi: $\frac{3}{4}$ z $28 + 1 = 22$
  Nezaměstnaný půjčil Francouzi: $\frac{1}{4}$ z $28 + 1 = 8$
- 6. měsíc:
  Francouz půjčil nezaměstnanému: $\frac{5}{6}$ z $24 + 1 = 21$
  Herec půjčil nezaměstnanému: $\frac{1}{6}$ z $24 + 1 = 5$

Sečteme půjčky:

- Herec dluží Francouzi 28 šilinků. Francouz dluží herci 44 šilinků. Dohromady Francouz dluží herci $44 - 28 = 16$ šilinků.
- Nezaměstnaný dluží Francouzi 29 šilinků. Francouz dluží nezaměstnanému 33 šilinků. Dohromady Francouz dluží nezaměstnanému $33 - 29 = 4$ šilinky.
- Nezaměstnaný dluží herci 20 šilinků. Herec dluží nezaměstnanému 41 šilinků. Dohromady herec dluží nezaměstnanému $41 - 20 = 21$ šilinků.

Francouz nemusí platit herci, místo toho splatí část dluhu herci u nezaměstnaného, takže nakonec Francouz zaplatí 20 šilinků nezaměstnanému a herec zaplatí 5 šilinků nezaměstnanému.

Úloha 4. *Máme digitální hodiny zobrazující hodiny, minuty a sekundy, ve formátu $hh\!:\!mm\!:\!ss$. Zobrazují nějaký platný čas, o kterém víme následující informace:*

- *Ještě nebylo poledne.*
- *Některá cifra je na hodinách alespoň třikrát.*
- *Někde na hodinách je číslice 6.*
- *Cifra nejvíc vpravo na hodinách je 5 (tedy hodiny zobrazují $hh\!:\!mm\!:\!s5$).*
- *Cifra druhá zprava na hodinách není 0 (tedy hodiny nezobrazují $hh\!:\!mm\!:\!0s$).*
- *Některá z dvojic hodiny-minuty, hodiny-sekundy a minuty-sekundy je stejná (tedy hodiny zobrazují $xy\!:\!xy\!:\!ab$, $xy\!:\!ab\!:\!xy$ nebo $ab\!:\!xy\!:\!xy$).*

Jaký čas zobrazují hodiny?

Řešení:
Z čtvrté podmínky víme, že poslední cifra je 5. Označme si zbylé cifry na hodinách $ab\!:\!cd\!:\!e5$.
Z třetí podmínky víme, že někde na hodinách je číslice 6. Vyzkoušíme všechny možnosti:

- $a = 6$. Víme, že hodiny zobrazují platný čas, a den má pouze 24 hodin, tedy $a = 6$ nikdy nenastane.
- $b = 6$. Toto je opravdu možné.
- $c = 6$. Víme, že hodiny zobrazují platný čas, a hodina má pouze 60 minut, tedy $c = 6$ nikdy nenastane.
- $d = 6$. Hodiny zobrazují $ab\!:\!c6\!:\!e5$. Podívejme se na šestou podmínku. Minuty a sekundy v tomto případě určitě shodné nebudou, proto hodiny musí být shodné s minutami nebo sekundami, neboli $b = 6$ nebo $b = 5$. Tak jako tak, určitě platí $a = 0$, protože jinak by neplatila první podmínka (bylo by víc než 12 hodin, a tedy po poledni). Z páté podmínky plyne, že e není 0, tedy nemůžou být shodné hodiny a sekundy. Proto musí být shodné hodiny a minuty, tedy hodiny zobrazují $06\!:\!06\!:\!e5$. Aby byla dodržena druhá podmínka, musí platit $e = 0$ nebo $e = 6$. V prvním případě je porušena pátá podmínka, druhá nedává platný čas. Proto d nemuže být 6.
- $e = 6$. Víme, že hodiny zobrazují platný čas, a minuta má pouze 60 sekund, tedy $e = 6$ nikdy nenastane.

Vidíme, že jediná možnost je $b = 6$. Proto musí platit $a = 0$, jinak by bylo víc než 12 hodin, tedy po poledni. Hodiny tedy musí zobrazovat $06\!:\!cd\!:\!e5$. Podíváme se na šestou podmínku. Hodiny a sekundy určitě shodné nebudou, takže musí být shodné hodiny a minuty, nebo minuty a sekundy. V prvním případě ale dostaneme $d = 6$, což jsme výše ukázali, že není možné. Musí proto být shodné minuty a sekundy.

Hodiny tedy zobrazují $06\!:\!e5\!:\!e5$. Aby byla dodržena druhá podmínka, musí $e = 0$, $e = 6$ nebo $e = 5$. První možnost ale popírá pátou podmínku a druhá možnost nedává platný čas, tedy musí $e = 5$.

Jediné řešení je $06\!:\!55\!:\!55$.

Úloha 5. *Meč se postupně zvětšuje opakujícím se cyklem, který se skláda ze tří částí jdoucích po sobě:*

1. *Meč se prodlouží o 5 cm,*
2. *meč se prodlouží o 10 %,*
3. *meč se zkrátí o 2 cm.*

Odpovězte na následující otázky:

- *Jak dlouhý bude meč po 5 cyklech, pokud měl na začátku 10 cm?*
- *Jak dlouhý bude meč po prvním cyklu, pokud měl na začátku délku x?*
- *Jak vypadá obecný vzorec pro délku meče, který měl na začátku délku x, po n cyklech?*

Řešení:

- Jak dlouhý bude meč po prvním cyklu, pokud měl na začátku délku x?
    1. Nejprve se prodlouží o 5 cm, talže bude mít délku $x + 5$ cm,
    2. Poté se prodlouží o 10 %, neboli jeho nová délka bude 110 % původní, takže nově má délku $1,10 \cdot (x + 5)$ cm,
    3. Poté se zkrátí o 2 cm, takže má novou délku $1,1 \cdot (x + 5) - 2 = x \cdot 1,1 + 3,5$ cm.
- Jak dlouhý bude meč po 5 cyklech, pokud měl na začátku 10 cm? Jak vypadá obecný vzorec pro délku meče, který měl na začátku délku x, po n cyklech? Z minulé odrážky víme, že se vždy s každým dalším cyklem délka zvětší 1,1 krát a k tomu o 3,5 cm. Vezměme si jako příklad zadání první otázky. Meč má na začátku 10 cm a bude se zvětšovat v 5 cyklech. Rozepíšeme-li si to, bude to vypadat takto:

$$((((10 \cdot 1,1 + 3,5) \cdot 1,1 + 3,5) \cdot 1,1 + 3,5) \cdot 1,1 + 3,5) \cdot 1,1 + 3,5$$

  Násobení je distributivní, takže si toto můžu přepsat pro každé z čísel, které je násobeno:

  - První cyklus: $10 \cdot 1,1 + 3,5$
  - Druhý cyklus: $(10 \cdot 1,1 + 3,5) \cdot 1,1 + 3,5 = 10 \cdot 1,1 \cdot 1,1 + 3,5 \cdot 1,1 + 3,5$
  - Třetí cyklus: $(10 \cdot 1,1 \cdot 1,1 + 3,5 \cdot 1,1 + 3,5) \cdot 1,1 + 3,5 = 10 \cdot 1,1 \cdot 1,1 \cdot 1,1 + 3,5 \cdot 1,1 \cdot 1,1 + 3,5 \cdot 1,1 + 3,5$
  - Čtvrtý cyklus: $(10 \cdot 1,1 \cdot 1,1 \cdot 1,1 + 3,5 \cdot 1,1 \cdot 1,1 + 3,5 \cdot 1,1 + 3,5) \cdot 1,1 + 3,5 = 10 \cdot 1,1 \cdot 1,1 \cdot 1,1 \cdot 1,1 + 3,5 \cdot 1,1 \cdot 1,1 \cdot 1,1 + 3,5 \cdot 1,1 \cdot 1,1 + 3,5 \cdot 1,1 + 3,5$
  - Pátý cyklus: $(10 \cdot 1,1 \cdot 1,1 \cdot 1,1 \cdot 1,1 + 3,5 \cdot 1,1 \cdot 1,1 \cdot 1,1 + 3,5 \cdot 1,1 \cdot 1,1 + 3,5 \cdot 1,1 + 3,5) \cdot 1,1 + 3,5 = 10 \cdot 1,1 \cdot 1,1 \cdot 1,1 \cdot 1,1 \cdot 1,1 + 3,5 \cdot 1,1 \cdot 1,1 \cdot 1,1 \cdot 1,1 + 3,5 \cdot 1,1 \cdot 1,1 \cdot 1,1 + 3,5 \cdot 1,1 \cdot 1,1 + 3,5 \cdot 1,1 + 3,5$

  Převedu si to do zápisu pomocí mocnin:

$$10 \cdot 1,1^5 + 3,5 \cdot 1,1^4 + 3,5 \cdot 1,1^3 + 3,5 \cdot 1,1^2 + 3,5 \cdot 1,1 + 3,5$$

  Vytknu 3,5:

$$10 \cdot 1,1^5 + 3,5 \cdot (1,1^4 + 1,1^3 + 1,1^2 + 1,1^1 + 1)$$

Vypočítám, čímž získám výsledek první otázky:

$$10 \cdot 1,1^5 + 3,5 \cdot (1,1^4 + 1,1^3 + 1,1^2 + 1,1^1 + 1) = 37,47295 \text{ cm}$$

Nyní vzorec zobecním pro počáteční délku x a n cyklů:

$$x \cdot 1,1^n + 3,5 \cdot (1,1^{n-1} + 1,1^{n-2} \ldots + 1,1 + 1) \text{ cm}$$

Pokročilé dokončení:
Navíc můžeme upravit ještě součet $S = 1,1^{n-1} + 1,1^{n-2} \ldots + 1,1 + 1$:
Vynásobíme jej nejprve číslem $1,1$:

$$1,1 \cdot S = 1,1^n + 1,1^{n-1} \ldots + 1,1^2 + 1,1$$

Tyto dvě rovnosti od sebe odečteme:

$$\begin{aligned} 1,1 \cdot S - S &= (1,1^n + 1,1^{n-1} \ldots + 1,1^2 + 1,1) - (1,1^{n-1} + 1,1^{n-2} \ldots + 1,1 + 1) \\ 0,1 \cdot S &= 1,1^n - 1 \qquad / \cdot 10 \\ S &= 10 \cdot 1,1^n - 10 \end{aligned}$$

Získali jsme, že meč s počáteční délkou x má po n cyklech délku $x \cdot 1,1^n + 3,5 \cdot (10 \cdot 1,1^n - 10)$ cm.

Úloha 6. *Francouz, herec, nezaměstnaný a Mečík si koupili každý jiné občerstvení (k dispozici byla zmrzlina s malinovou příchutí, zmrzlina s limetkovou příchutí a dvě ledové tříště také v malinové či limetkové podobě). Každý u toho měl jinou barvu trička (modrou, zelenou, červenou nebo černou) a žádní dva si neobědnávali současně, přišli tedy ke stánku v nějakém pořadí (1. až 4.). Víme, že:*

- *Ti dva, kteří si koupili tříšť, nepřišli hned po sobě a to samé platí pro ty dva, co si dali zmrzlinu,*
- *Francouz si dal malinovou zmrzlinu a nepřišel poslední,*
- *herec přišel až někdy po nezaměstnaném, ale přišel někdy před Mečíkem,*
- *ten, kdo si dal limetkovou zmrzlinu, buď přišel první, nebo měl modré tričko,*
- *pokud nezaměstnaný přišel jako poslední, dal si malinovou tříšť, ale pokud nepřišel poslední, tak si ji nedal,*
- *ti dva, kteří si dali něco malinového, neměli černé tričko a nepřišli poslední*
- *Mečík buď měl modré tričko, nebo přišel první,*
- *nezaměstnaný si dal tříšť,*
- *ani jedna z osob, které si daly zmrzlinu, neměla tričko začínající na měkkou souhlásku.*

Pokud navíc víme, že si herec dal tříšť, lze určit přesně kdo se čím občerstvil, jakou měl barvu trička a v jakém pořadí kdo přišel? Pokud ano, tak to všechno zjistěte.

Řešení:

Podmínky si očíslujeme 1. až 9. a zapíšeme do tabulky, co víme ze zadání přímo:

Osoba	Francouz	Herec	Nezaměstnaný	Mečík
Občerstvení	Mal. zmrzlina	Tříšť	Tříšť	h
Barva trička	h	h	h	h
Pořadí	h	h	h	h

Mečík je poslední, u koho není rozhodnuto, jestli měl zmrzlinu nebo tříšť. Jelikož tříšť už si dvě osoby daly, musí mít zmrzlinu. Francouž už má malinovou, takže na něj zbyla limetková.

Z 2. podmínky víme, že Francouz nepřišel poslední. Z 3. podmínky víme, že herec ani nezaměstnaný nepřišli poslední. Proto Mečík přišel poslední (neboli 4.).

Pokud Mečík přišel poslední, nemohl přijít jako první, takže ze 7. podmínky plyne, že má modré tričko.

Zároveň to znamená, že nezaměstnaný poslední nepřišel, takže z 5. podmínky plyne, že neměl malinovou tříšť. Musel mít tedy limetkovou a malinová zbyla na herce.

Zatím víme:

Osoba	Francouz	Herec	Nezaměstnaný	Mečík
Občerstvení	Mal. zmrzlina	Mal. tříšť	Lim. tříšť	Lim. zmrzlina
Barva trička	h	h	h	Modrá
Pořadí	h	h	h	4.

Z 9. podmínky víme, že ani jedna z osob, které si daly zmrzlinu, neměla barvu trička začínající na měkkou souhlásku, tedy měla buď modré, nebo zelené. Modré tričko už má Mečík, takže zelené má Franzouz.

Z 6. podmínky víme, že Francouz ani herec neměli černé tričko. Mečík už má modré, takže černé musí mít nezaměstnaný. Na Herce zbylo červené tričko.

Z 1. podmínky víme, že ti dva, co si dali tříšť (neboli herec a nezaměstnaný) nešli hned po sobě. Zároveň z 3. podmínky víme, že herec přišel až po nezaměstnaném. Mečík už víme, že přišel 4., takže nezaměstnaný musí být 1. a herec 3. Na Francouze zbylo 2. místo.

Tím už jsme zjistili všechny informace:

Osoba	Francouz	Herec	Nezaměstnaný	Mečík
Občerstvení	Mal. zmrzlina	Mal. tříšť	Lim. tříšť	Lim. zmrzlina
Barva trička	Zelená	Červená	Černá	Modrá
Pořadí	2.	3.	1.	4.

Úloha 7. *Dokažte, že existuje* 10000 *po sobě jdoucích kladných celých čísel, mezi kterými je právě* 42 *druhých mocnin nějakých celých čísel (není nutné je najít, stačí dokázat jejich existenci i jinak).*

Řešení:

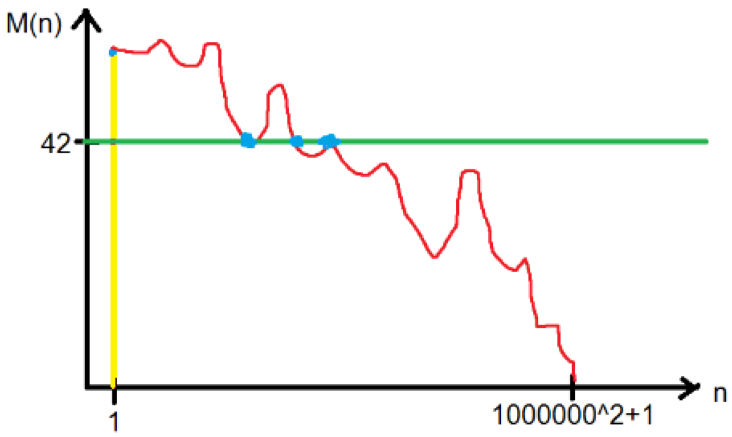
Výrazem $M(n)$ pro přirozené číslo n označme počet druhých mocnin mezi čísly n, $n+1$, $n+2$, $\dots$, $n+9999$.

$43^2 = 1806 < 10000$, takže mezi čísly 1 až 10000 je alespoň 43 druhých mocnin a tedy $M(1) > 42$.

Všimněme si, že rozdíl druhých mocnin dvou po sobě jdoucích čísel roste s jejich velikostí. Když si proto vezmeme dost velké číslo x, bude rozdíl $(x+1)^2 - x^2$ větší než 10000. Například pro $x = 1000000$ ten rozdíl vychází 2000001. Mezi čísly 1000000^2 a 1000001^2 nejsou žádné druhé mocniny, takže $M(1000000^2 + 1) = 0$.

Když se zamyslíme nad tím, jak se může $M(n)$ chovat pro různá n, zjistíme, že $M(n) - M(n+1)$ může nabývat pouze hodnot -1, 0 a 1. Výraz $M(n)$ tedy pro 2 sousední n má buď stejnou hodnotu, nebo se změní o 1.

Uvažme graf $M(n)$ v závislosti na n:



Ať už tento graf vypadá jakkoliv, musí se zleva do prava dostat z hodnoty $M(1)$ na $M(1000000^2 + 1)$. Protože $M(1) > 42 > M(1000000^2 + 1)$ a M se vždy může snížit jen o 1, musí existovat alespoň jedno x, pro které $M(x) = 42$.