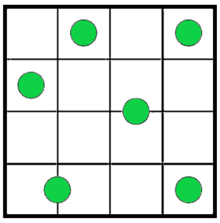
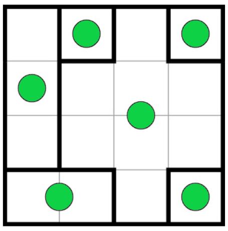
Řešení 4. série

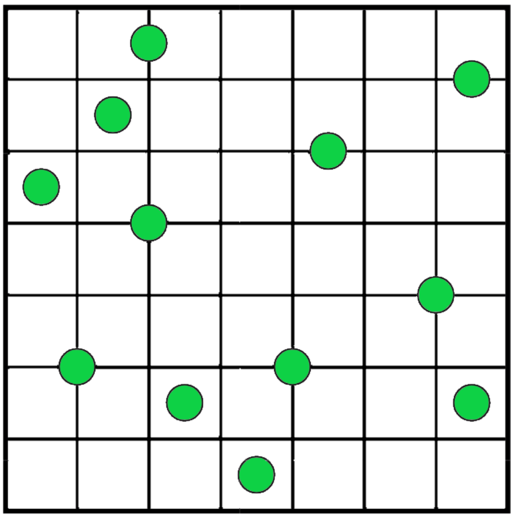
Úloha 1. *Následující mřížku rozdělte do několika oblastí. Každé světlo v mřížce přísluší právě jedné oblasti. Každá oblast obsahuje právě 1 světlo a je podle tohoto světla středově souměrná.*

Příklad: *Příklad řešení:*

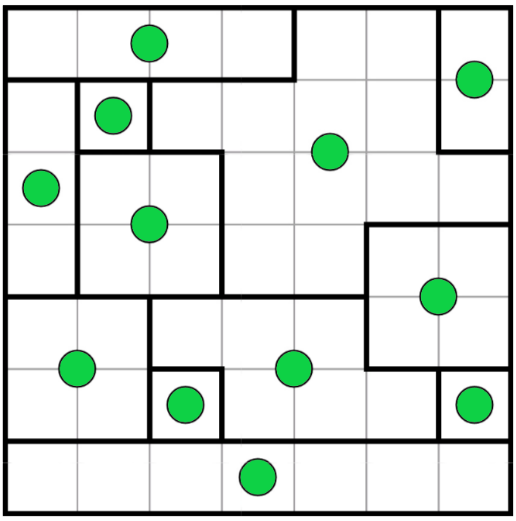




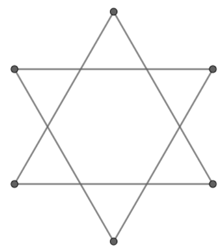
Vaše zadání:



Řešení:

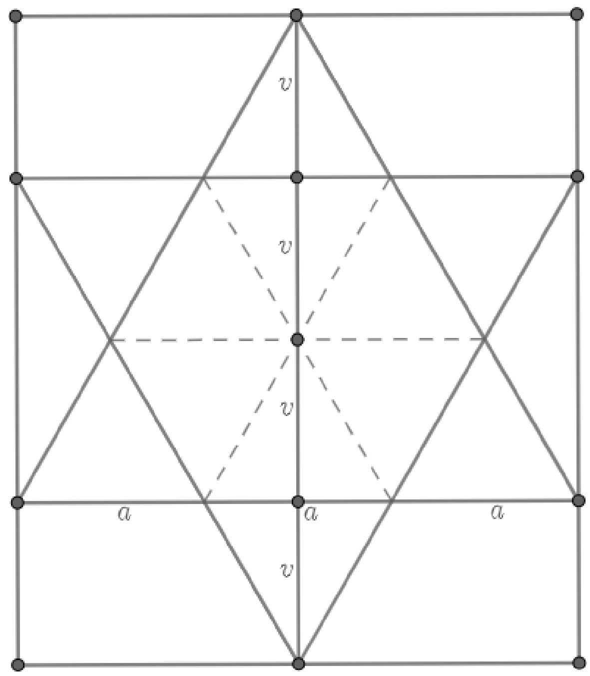


Úloha 2. *Hexagram vznikne sjednocením dvou shodných rovnostranných trojúhelníků s těžištěm ve stejném bodě, navzájem pootočených o 60 stupňů. Kolem hexagramu je obdélník, který se svými hranami dotýká všech šesti cípů tohoto hexagramu.*



1. *Jaký je poměr obsahu obdélníku ku obsahu hexagramu uvnitř?*
2. *Jaké délky stran by měl obdélník, aby byl zachován poměr stran jako v původním obdélníku a měl stejný obsah jako daný hexagram?*

Řešení:



1. Každý rovnostranný trojúhelník má těžiště ve $\frac{2}{3}$ výšky (v rovnostranném trojúhelníku splývají těžnice a výšky). Tudíž od každého cípu hexagramu jsou to do těžiště $\frac{2}{3}$ výšky a od každého středu strany $\frac{1}{3}$ výšky.

   Označme výšku velkých trojúhelníků $3 \cdot v$. Potom od těžiště do středu strany je to $\frac{1}{3} \cdot 3 \cdot v = v$ a od těžiště až do cípu $\frac{2}{3} \cdot 3 \cdot v = 2 \cdot v$, výška malého trojúhelníku (jeho výška je od cípu do nejbližšího středu strany) je $2 \cdot v - v = v$. Malý trojúhelník je rovnostranný, protože má jeden cíp velkého trojúhelníku (60°) a další dva úhly jsou souhlasné s úhlem velkého trojúhelníku.

   Hexagram obsahuje pravidelný šestiúhelník (je pravidelný, protože má stejně dlouhé strany, jsou to strany malých trojúhelníků, a všude stejné úhly), který se skládá z 6 rovnostranných trojúhelníků, které jsou stejně velké jako malé trojúhelníky, protože sdílí jednu stranu. Celkově se skládá hexagram ze 12 shodných rovnostranných trojúhelníků.

   Stranu těchto malých trojúhelníků si označíme a (jejich výška víme, že je v). Obsah jednoho tohoto trojúhelníku je $\frac{a \cdot v}{2}$. Obsah hexagramu je: $12 \cdot \frac{a \cdot v}{2} = 6 \cdot a \cdot v$.

   Jedna strana obdélníku jsou 4 výšky malých trojúhelníků. Druhá strana jsou 3 strany malých trojúhelníků. Obsah obdélníku je proto $4 \cdot v \cdot 3 \cdot a = 12 \cdot a \cdot v$.

   Poměr obsahu obdélníku ku obsahu hexagramu je: $(12 \cdot a \cdot v) : (6 \cdot a \cdot v) = 2 : 1$.

2. Poměr stran obdelníku je $(4 \cdot v) : (3 \cdot a)$. Proto strany nového obdelníku jsou $4 \cdot v \cdot k$, $3 \cdot a \cdot k$, kde $k \in \mathbb{R}$. Víme, že obsah nového obdelníku je stejný jako obsah hexagramu, takže platí:

$$\begin{aligned}(4 \cdot v \cdot k) \cdot (3 \cdot a \cdot k) &= 6 \cdot a \cdot v \\ 12 \cdot a \cdot v \cdot k^2 &= 6 \cdot a \cdot v \\ k^2 &= \frac{1}{2} \\ k &= \frac{\sqrt{1}}{\sqrt{2}} = \frac{1 \cdot \sqrt{2}}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}\end{aligned}$$

Potom jedna strana je $4 \cdot v \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 2 \cdot \sqrt{2} \cdot v$, druhá je $3 \cdot a \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{3 \cdot \sqrt{2}}{2} \cdot a$.

Kolik ale je a, v? Víme, že v je výška rovnostraného trojúhelníku se stranou a. Proto jde o odvěsnu pravoúhlého trojúhelníku s druhou odvěsnou $\frac{a}{2}$ a přeponou a. Platí tedy:

$$\begin{aligned}a^2 &= \left(\frac{a}{2}\right)^2 + v^2 \\ \frac{4 \cdot a^2}{4} &= \frac{a^2}{4} + v^2 \qquad / - \frac{a^2}{4} \\ \frac{3 \cdot a^2}{4} &= v^2 \\ \sqrt{\frac{3 \cdot a^2}{4}} &= \sqrt{v^2} \\ \frac{\sqrt{3} \cdot a}{2} &= v\end{aligned}$$

Proto jedna strana nového obdelníku je $2 \cdot \sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{3} \cdot a}{2} = \sqrt{2} \cdot \sqrt{3} \cdot a = \sqrt{6} \cdot a$, druhá je $\frac{3 \cdot \sqrt{2}}{2} \cdot a$.

Označme stranu velkého trojúhelníku x. Víme, že a je strana malého trojúhelníku, takže $x = 3 \cdot a$, neboli $a = \frac{x}{3}$. Proto jedna strana nového obdelníku je $\sqrt{6} \cdot \frac{x}{3} = \frac{\sqrt{6} \cdot x}{3}$, druhá je $\frac{3 \cdot \sqrt{2}}{2} \cdot \frac{x}{3} = \frac{\sqrt{2} \cdot x}{2}$.

Úloha 3. *Dokažte, že součet tří po sobě jdoucích mocnin čísla 4 s přirozeným exponentem je vždy dělitelný 7. (Např. výraz* $4^1 + 4^2 + 4^3$ *je dělitelný 7.)*

Řešení:
Součet tří po sobě jdoucích mocnin čísla 4 s přirozeným exponentem si můžeme zapsat jako:

$$4^n + 4^{n+1} + 4^{n+2}$$

Výraz upravíme:

$$4^n + 4 \cdot 4^n + 4 \cdot 4 \cdot 4^n = (1 + 4 + 4 \cdot 4) \cdot 4^n = 21 \cdot 4^n$$

Číslo 21 je dělitelné 7, tudíž i všechny násobky čísla 21 budou dělitelné 7. Tedy i součet tří po sobě jdoucích mocnin čísla 4 bude dělitelný 7.

Úloha 4. *Na podlaze je dlouhá řada políček a Dušan po nich skáče. Vždy své skákání začíná na prvním políčku a pak vždy buď skočí hned na to následující nebo jedno políčko úplně přeskočí a dopadne až na to další. Tomáše tohle skákání zaujalo. Ke každému políčku napsal, kolika způsoby tam Dušan mohl doskákat. Jaké číslo napsal na políčko, které je mezi políčky s čísly 2584 a 6765?*

Řešení:
Číslo na políčku mezi políčky s čísly 2584 a 6765 si označme x. Políčka s čísly 2584, x a 6765 po řadě označme a, b, c. Na políčko c se může dostat pouze dvěma způsoby a to jedním skokem z políčka a nebo b. Proto $6765 = x + 2584$, takže $x = 4181$.

Úloha 5. *Mějme nekonečnou šachovnici, na které jsou rozestavěny figurky, z nichž každá má na sobě napsaná dvě přirozená čísla n a m. Každá figurka se může hýbat následujícím způsobem: vždy vyskočí do vzduchu, natočí se jedním ze čtyř hlavních směrů (nahoru, dolů, doleva nebo doprava), posune se o n políček, poté se otočí o 90° a posune se o m políček. Až po tomto druhém posunutí figurka opět dopadne na šachovnici. Pro danou figurku se čísla n a m nemění, ovšem pro různé figurky mohou být tato čísla různá. Figurka s čísly $n = 2$ a $m = 1$ by vlastně fungovala úplně přesně jako klasický šachový kůň.*
Které šachové figurky (tedy s kterými n, m) jsou schopné dříve nebo později doskákat na jakékoliv políčko na nekonečné šachovnici? Najděte všechny možnosti a dokažte, žádná jiná figurka to nedokáže.

Řešení:
Jedno z čísel m, n je sudé, druhé liché, což je zřejmé z klasického obarvení šachovnice. Pokud by totiž byla obě sudá nebo obě lichá, bude figurka donekonečna jen skákat na políčkách té barvy, na které začala.

Zároveň musí být nesoudělná (neboli jejich největší společný dělitel musí být 1). Označme počáteční políčko postavičky $[0, 0]$ a největší společný dělitel m, n označme d. Pokud jsou m, n soudělná, platí $d > 1$. Počáteční souřadnice jsou obě dělitelné d a bez ohledu na to, kam se figurka posune, v obou souřadnicích se přičte vždy nějaký násobek d (buď m, nebo n) a zbytek po dělení d se tedy nikdy u ani jedné souřadnice nemění. Figurka se tedy nikdy nedostane na žádné políčko, jehož některá souřadnice není dělitelná d. Kdyby $d > 1$, nějaká taková políčka budou existovat.

Nyní stačí dokázat, že pokud nějaká čísla m, n splňují obě tyto podmínky, dovede figurka s těmito čísly pokrýt celou šachovnici.

Nejprve dokážeme, že pro libovolnou dvojici čísel m, n, kde jedno číslo je rovno jedné a druhé je sudé, to jde. Bez újmy na obecnosti řekněme, že číslo rovno jedné je n a druhé, sudé číslo je m. Nyní provedu skok o m políček nahoru a o 1 políčko doprava, potom druhý skok o m políček dolů a opět o 1 doprava. Tímto jsem se dostal na souřadnice $[2, 0]$. Tuto dvojici skoků zopakuji $\left(\frac{m}{2}\right)$-krát, čímž se dostanu na souřadnice $[m, 0]$. Nakonec provedu skok o m políček doleva a o 1 políčko nahoru. Tímto se dostanu na souřadnice $[0, 1]$. Posunul jsem se tedy ze startu o jedno políčko jedním ze čtyř hlavních směrů. Opakováním tohoto algoritmu se tedy můžu posunout o libovolný počet polí kterýmkoliv hlavním směrem, z čehož je zřejmé, že dokážu doskákat na libovolné pole na šachovnici.

Pokud nyní dokážeme, že se pomocí libovolné dvojice m, n dokážeme dostat na políčko, jehož jedna souřadnice je 1 a druhá je sudá, máme hotovo. Dokážeme tím totiž, že existuje algoritmus, kterým můžeme několika skoky pomocí dvojice m, n provést jeden skok který by náležel dvojici m', n', z nichž jedno je rovno jedné a druhé je sudé. S těmi už víme, že dokážeme pokrýt celou šachovnici, takže by to šlo i s dvojicí m, n.

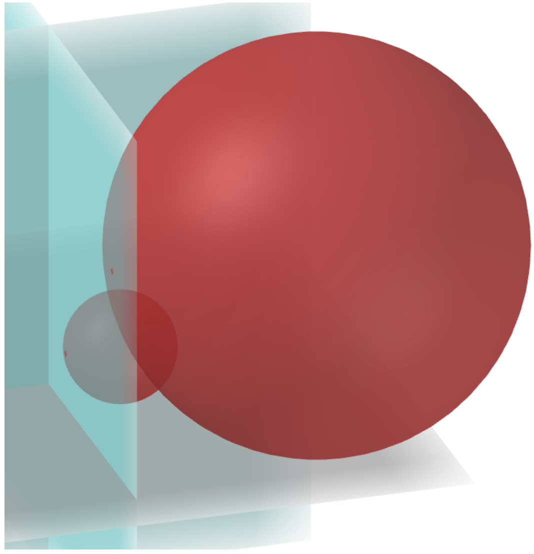
Uvažujme dvojici nesoudělných čísel m, n, kde jedno je liché a druhé sudé. Bez újmy na obecnosti řekněme, že $n > m$. Pokud je jedno rovné 1, máme hotovo. Pokud ne, postupujeme dále s tím, že platí $n > m > 1$.

Začínáme na $[0, 0]$. Uděláme skok o n doprava a m nahoru (jsme na $[n, m]$), poté skok o n doleva a m nahoru (jsme na $[0, 2 \cdot m]$), poté skok o m doleva a n dolů, skončíme na $[-m, 2 \cdot m - n]$. Totéž by byl schopen provést kůň s dvojicí $|-m|$, $|2 \cdot m - n|$. Tyto hodnoty pro přehlednost nazvěme o, p. Platí následující tvrzení:

- $o = |-m|$, tedy $o = m$.
- $n > p$, neboli $n > |2 \cdot m - n|$, což dokážu takto:
  - pokud $2m - n \geq 0$, tak se snažíme dokázat $n > 2 \cdot m - n$, neboli $2 \cdot n > 2 \cdot m$, neboli $n > m$, což víme, že platí,
  - pokud $2 \cdot m - n < 0$, tak se snažíme dokázat $n > -(2 \cdot m - n) = n - 2 \cdot m$, neboli $0 > -2 \cdot m$, neboli $m > 0$, což také víme, že platí.
- p není nulové, protože by muselo platit $n = 2m$, jenže pak by n bylo dělitelné m, takže jejich největší společný dělitel byl alespoň m, což je více než 1, takže by m a n nebyla nesoudělná.
- Čísla o a p mají opačnou paritu:
  - pokud je o sudé, pak je i m sudé, takže n je naopak liché a tedy $p = 2 \cdot m - n$ je rozdíl sudého čísla $2 \cdot m$ a lichého čísla n, tedy p je liché,
  - pokud je o liché, pak je i m liché, takže n je naopak sudé a tedy $p = 2 \cdot m - n$ je rozdíl dvou sudých čísel, tedy p je sudé.
- Čísla o a p jsou nesoudělná. Označme jejich největší společný dělitel d. Víme, že d je dělitelem o, tedy je dělitelem i m. Pokud je dělitelem m, je dělitelem i $2 \cdot m$. Platí, že d je dělitelem $p = 2m - n$. Platí tedy, že d je dělitelem výrazů $2 \cdot m$ i $2 \cdot m - n$, z toho vyplývá, že je dělitelem i jejich rozdílu $2 \cdot m - (2 \cdot m - n) = n$. Víme tedy, že d je dělitelem jak m, tak n, takže je dělitelem i jejich největšího společného dělitele, což je 1, protože n a m jsou nesoudělná. Pokud d je dělitelem 1 a je přirozené, pak platí $d = 1$, tedy o a p jsou nesoudělná.

Je jasné, že všechna políčka, kam se dostanu s dvojicí o, p, budu schopen navštívit i s dvojicí m, n. Z výše uvedených šesti výroků mimo jiné vyplývá, že o a p jsou dvojice čísel, která by mohla příslušet figurce, o které se snažím dokázat, že jí dovedu vyplnit celou šachovnici (jelikož m, n jsou nesoudělná, jedno je liché a jedno sudé). Kromě toho víme, že $o = m$ a $p < n$, takže se jedno číslo zmenšilo. Zároveň jsou obě větší než 0. Pokud je jedno z čísel o, p rovno jedné, mám vyhráno. Pokud ne, celý tento postup zopakuji pro dvojici o, p, obě čísla se opět zmenší, ale zůstanou větší než 0, a tak dřív nebo později jedno z čísel v nějaké dvojici, co mi vyjde, bude rovno jedné. Z postupu vyplývá, že co dokážu vyplnit tou poslední dvojicí, dokážu vyplnit i tou předchozí, i všemi dvojicemi předtím, včetně m, n. Protože jsem již dokázal, že tou poslední dvojicí lze vyplnit celou nekonečnou šachovnici, lze to i pro moji obecnou dvojici m, n.

Úloha 6. *V pravoúhlém rohu místnosti jsou dvě koule tak, že se obě dotýkají všech tří stěn a koule se navzájem neprotínají (viz obrázek). Jaký největší poloměr může mít menší z nich, jestliže ta větší má poloměr r?*



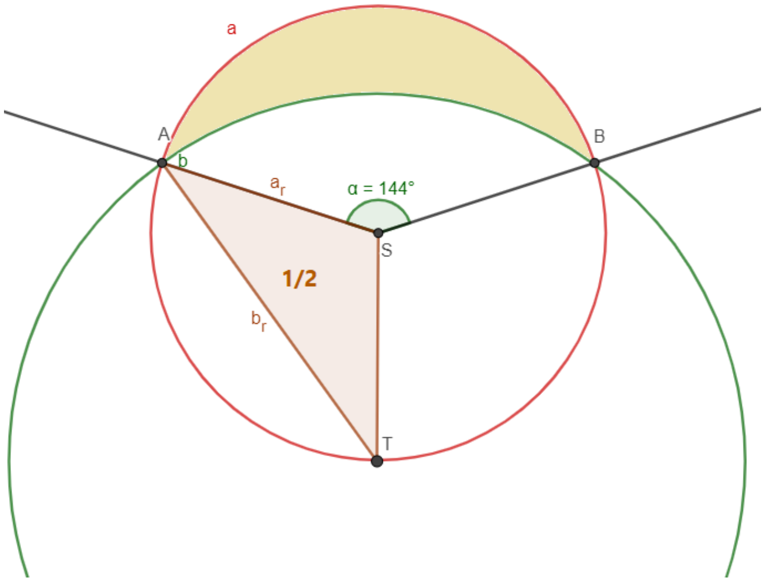
Řešení:

Označme střed velké koule S_1 a střed malé S_2, poloměr malé koule r_2 a bod, kde se koule dotýkají, D. Roh místnosti označíme O. Z Pythagorovy věty můžeme spočítat $|S_1O| = \sqrt{3} \cdot r$. Zároveň víme, že $|S_2O| = \sqrt{3} \cdot r_2$. $|DO| = |S_2O| + r_2$, tedy $|S_1O| - r = |S_2O| + r_2$.

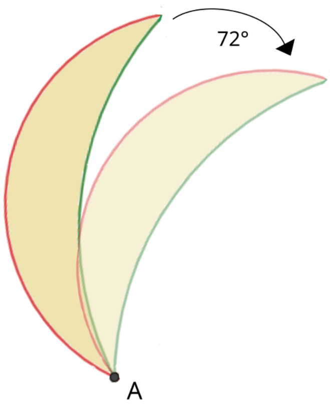
$$|S_1O| - r = |S_2O| + r_2$$
$$\sqrt{3} \cdot r - r = \sqrt{3} \cdot r_2 + r_2$$
$$r_2 \cdot (\sqrt{3} + 1) = r \cdot (\sqrt{3} - 1)$$
$$r_2 = \frac{r \cdot (\sqrt{3} - 1)}{(\sqrt{3} + 1)} = r \cdot (2 - \sqrt{3})$$

Zjistili jsme, že menší koule má poloměr nejvýše $r \cdot (2 - \sqrt{3})$.

Úloha 7. *Máme dvě kružnice $a(S, a_r)$ a $b(T, b_r)$, které se navzájem protínají ve dvou různých bodech A a B tak, že velikost úhlu $|\sphericalangle ASB| = 144°$. Také platí, že bod T leží na kružnici a a že trojúhelník AST má obsah roven jedné polovině. „Měsíčkem“ nazveme béžově vybarvený útvar vymezený kratšími oblouky AB kružnic a a b. Jaký obsah má „měsíček“? Vyjádřete pomocí a_r a b_r.*



Takto vzniklých „měsíčků“ vezmeme několik a vytvoříme z nich nový obrazec následovně: K prvnímu „měsíčku“ vždy přidáme další otočený okolo bodu A o $72°$ po směru hodinových ručiček. Takto přidáváme další „měsíčky“ do té doby, až máme vyskládané celé kolo, tj. žádný „měsíček“ nerotujeme o více než $360°$ od prvního. Jaký obsah má tento útvar vzniklý rotací „měsíčků“?



Nápověda: Nastudujte si, co jsou to obvodové a středové úhly. Jaké dvě přímky vymezují „měsíček“?

Řešení:

Obsah „měsíčku“ vypočítáme jako obsah kruhové výseče kružnice a + dva obsahy trojúhelníků AST − obsah kruhové výseče kružnice b. K tomu musíme znát úhel ATB u vrcholu T. Tento úhel je obvodový ke středovému úhlu 144° a je roven jeho polovině, 72°. Tedy obsah měsíčku je

$$\frac{144°}{360°} \cdot \pi \cdot a_r^2 + 2 \cdot \frac{1}{2} - \frac{72°}{360°} \cdot \pi \cdot b_r^2 = \frac{2}{5} \cdot \pi \cdot a_r^2 - \frac{1}{5} \cdot \pi \cdot b_r^2 + 1$$

Poté stačí zjistit, zda se po otočení o 72° dva „měsíčky“ překrývají, či nikoliv. Veďme tečny ke kružnici a body A a B, jejich průsečík označme C. Jeden „měsíček“ je vymezen polořímkou AB a polopřímkou AC, tj. všechny body „měsíčku“ leží v úhlu s rameny AB, AC. Když se „měsíček“ otočí o 72°, můžeme si představit, že se s ním otáčí i tyto polopřímky, které ho vymezují. Jestliže se „měsíček“ otočí o úhel vetší nebo roven úhlu, který svírají polopřímky AC a AB, máme dokázáno, že se dva měsíčky nepřekryjí. Vypočítáme tedy velikost úhlu BAC: Uvážíme čtyřúhelník $SACB$ s úhlem 144° u S a dvěma pravými úhly u bodů doteku tečen s kružnicí. Úhel ACB vyčíslíme dopočtem do 360° jako 36°. Jelikož je celý útvar symetrický, trojúhelník ABC je rovnoramenný, a oba úhly BAC i CAB jsou tak rovny 72°. To je přesně tolik, o kolik „měsíček“ otáčíme. Takže při každé rotaci položíme rameno AC nového „měsíčku“ na rameno AB předchozího „měsíčku“, tím pádem se nikdy nepřekryjí. A jelikož $\frac{360°}{72°} = 5$, v jednom kole položíme přesně 5 „měsíčků“. Obsah výsledného obrazce tedy bude $5 \cdot (\frac{2}{5} \cdot \pi \cdot a_r^2 - \frac{1}{5} \cdot \pi \cdot b_r^2 + 1) = 2 \cdot \pi \cdot a_r^2 - \pi \cdot b_r^2 + 5$.