Řešení 3. série

Úloha 1. *Máte krabice v pěti různých velikostech, přičemž menší krabici přes tu větší nevidíme. Vyplňte celou tabulku krabicemi, aby se stejná velikost krabice nevyskytovala v žádném řádku ani sloupci dvakrát (jako v sudoku). Čísla na okrajích tabulky značí počet krabic, které tím směrem vidíte.*

Příklad (pro 3 rozměry krabic):

			1
3	1		

Příklad řešení:

3	2	1	
2	1	3	1
1	3	2	
3	1		

Vaše zadání:

		2	2			
1						2
						3
	3		1		4	

Řešení:

		2	2			
	1	3	4	2	5	
	4	1	2	5	3	
1	5	2	3	1	4	2
	3	5	1	4	2	3
	2	4	5	3	1	
	3		1		4	

Úloha 2. *Byl nám poslán kód v podobě trojciferného čísla (nezačínal nulou). Kód se k nám ale dostal poškozený, cestou ho zachytily nepřátelské filtry. Ty kód sice pošlou dál, ale nějakým způsobem poškozený nebo upravený, a to podle následujících pravidel:*

- *Trojúhelníkový filtr přidá na konec řetězce „$\triangle$“, pokud bylo vložené číslo dělitelné třemi, a „$\triangledown$“, pokud nebylo (tedy „36“ $\xRightarrow{\triangle}$ „36$\triangle$“).*
- *Mazací filtr smaže poslední cifru a na konec řetězce přidá „|“ (tedy „36“ $\xRightarrow{|}$ „3|“).*
- *Převodový filtr číslo převede do dvojkové soustavy (tedy „36“ $\xRightarrow{\equiv}$ „100100“), barvu čísla nemění.*
- *Barvicí filtr obarví sudá čísla modře a lichá červeně. Obarví i zbylé znaky, které do filtru vstoupily (tedy „36$\triangle$“ $\xRightarrow{B}$ „36$\triangle$“).*

Filtry mohou kód zachytit v jiném než uvedeném pořadí a každý filtr mohl zachytit kód nejvýše jednou. Text nám byl poslán neobarvený (černý), psaný v desítkové soustavě. Každý filtr zpracovává pouze číselné znaky, ostatní ignoruje (jen barvicí je obarví). Pokud filtr přidává nějaký znak za konec řetězce, vrací ho nejen za číslo, ale i za všechny ostatní znaky (tedy „36|“ $\xRightarrow{\triangle}$ „36|$\triangle$“). Se všemi čísly se pracuje, jako by byla zapsána v desítkové soustavě (takže např. trojka zapsaná ve dvojkové soustavě jako „11“ není dělitelná třemi).

Zjistěte, jaký trojciferný kód nám byl zaslán, pokud jsme obdrželi „110001 $\triangle$ |“. Zároveň zapište, které filtry jsme použili, v jakém pořadí a zdůvodněte, proč nemohlo být jiné.

Řešení:

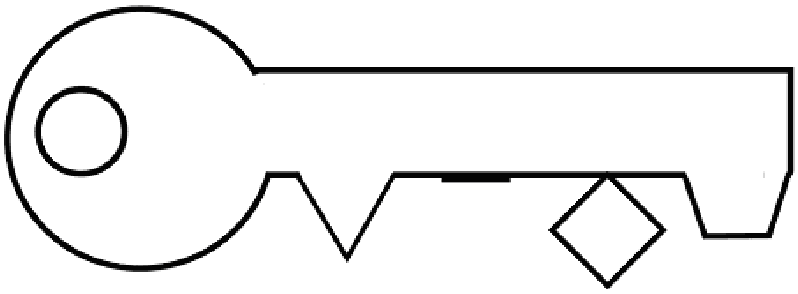
Jelikož jsou obarvená čísla, ale ne znaky, byl použit barvený filtr před trojúhelníkovým a mazacím. Posledním filtrem byl tedy buď mazací (jelikož na konci vidíme „|“), nebo převodový (jelikož ten na konec nepřipisuje žádný znak). Ukážeme si, co by se stalo, kdyby byl posledním filtrem mazací:

Měli jsme nějaký kód a převedli jsme jej do dvojkové soustavy. Jelikož byl posledním filtrem mazací, předtím mělo číslo ještě jeden znak navíc, po projití převodovým filtrem tedy vypadlo „110001x“, kde x je 1 nebo 0. Ať už přichází barvicí těsně před, nebo těsně po převodovém, výslednou paritu to neovlivní, jelikož číslo zapsané v dvojkové soustavě má stejnou paritu, jako když je zapsáno v desítkové. Barvicí filtr obarvuje na červenou, takže číslo bylo liché. Místo x tedy patřila 1, protože lichá čísla zapsaná ve dvojkové soustavě končí na 1. „1100011“ převedeno do desítkové soustavy je je 99, kódem by bylo tedy bylo „99“, to ale není tříciferné. Dostáváme spor.

Posledním filtrem tedy nemohl být mazací, tedy musel být posledním filtrem převodový. Barvicí je tak jediný filtr, který mohl být použit jako první. Když shrneme všechny podmínky, jediné možné pořadí filtrů je barvicí, trojúhelníkový, mazací, převodový.

Měli jsme třímístné liché číslo tvaru $\overline{abc}$, dělitelné třemi. Smažeme poslední znak, zbylo $\overline{ab}$ a toto číslo převedeme na „110001“. To je „49“, první dva znaky z čísla $\overline{abc}$ tedy byly 49. Poslední cifru doplníme podle indicií, že číslo bylo liché a dělitelné třemi. Takovou vlastnost má pouze cifra 5. Poslané číslo tedy bylo „495“.

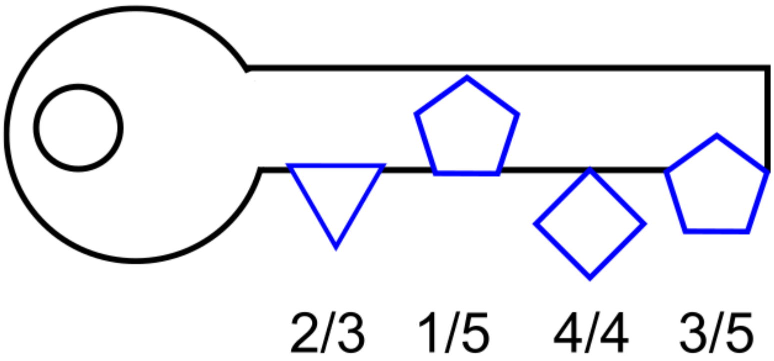
Úloha 3. *Klíč s parametry 2/3, 1/5, 4/4 a 3/5 vypadá takto:*



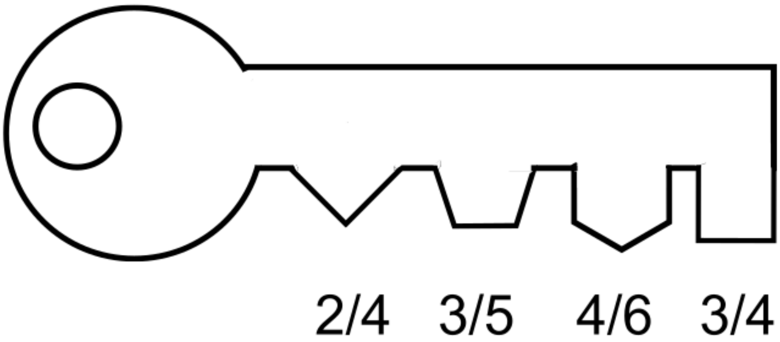
Klíč, který Tomáš hledá, má parametry 2/4, 3/5, 4/6, 3/4. Načrtněte, jak bude vypadat.

Řešení:

Každý parametr m/n se skládá ze dvou čísel m a n, kde n značí pravidelný n-úhelník a m počet jeho hran, které jsou pod úrovní hrany klíče.



Stejnou logiku použijeme i při kreslení druhého klíče a vyjde nám:



Úloha 4. *Každý na raketě mohl otevřít dveře svým osobním pětimístným kódem znaků A–Z nebo 0–9 splňujícím pravidlo:*

„Kód ABCDE je platný, jsou-li splněny právě dvě ze tří podmínek {P, Q, R},"

přičemž víte, že podmínky P, Q, R jsou některé tři podmínky ze seznamu:

1. *první znak kódu je písmeno,*
2. *čísel je v kódu více než písmen,*
3. *v kódu je alespoň jeden ze znaků {B, E, S, T, 1, 6, 8},*
4. *v kódu je číslo sousedící se dvěma písmeny,*
5. *v kódu se nějaký znak opakuje.*

Zjistěte, o které tři podmínky jde, a navrhněte další čtyři kódy, které pravidlu vyhoví, jestliže máte k dispozici seznam několika platných a neplatných kódů:

Platné kódy	Neplatné kódy
7B8BU	27PQR
7E6S3	66PSU
8P8P8	77777
DU5UK	12345
TTTTT	KAJAK
L5K92	A2375
V863H	S8V68

Řešení:
Jde o následující tři podmínky:

1. první znak kódu je písmeno,
3. v kódu je alespoň jeden ze znaků {B, E, S, T, 1, 6, 8},
4. v kódu je číslo sousedící se dvěma písmeny.

Na to můžeme přijít i náhodným zkoušením, zde je jeden systematičtější způsob:
Platný kód „8P8P8" splňuje všechny podmínky kromě první, proto musí být první podmínka mezi {P, Q, R} (když každý platný kód splňuje právě dvě z podmínek {P, Q, R}, tak nesplňuje právě jednu z podmínek {P, Q, R}).
Platný kód „7B8BU" splňuje všechny podmínky kromě první a druhé, zároveň víme, že první podmínka je mezi {P, Q, R}, takže druhá podmínka nemůže být mezi {P, Q, R}.
Platný kód „7E6S3" splňuje všechny podmínky kromě první a páté, zároveň víme, že první podmínka je mezi {P, Q, R}, takže pátá podmínka nemůže být mezi {P, Q, R}.
Vidíme, že druhá a pátá podínka nejsou mezi {P, Q, R}, takže {P, Q, R} musí být zbylé tři podmínky. Snadno ověříme, že potom opravdu všechny platné kódy pravidlo splňují a žádný z neplatných kódů pravidlo nesplňuje.

Úloha 5. *Nádrž se vypustí menším odtokem za 10 hodin, větším odtokem za 8 hodin. Nádrž začali vypouštět menším odtokem, který se ale po 2 hodinách ucpal, museli tedy otevřít i větší odtok. Oprava menšího odtoku trvala půl hodiny, po zbytek vypouštění byly otevřeny oba odtoky. Jak dlouho trvalo vypustit celou nádrž?*

Řešení:
Zadání přepíšeme do tabulky:

	Část nádrže vypuštěna za 1 h	Doba odtoku v h	Část nádrže vypuštěna tímto otvorem
Menší odtok	$\frac{1}{10}$	$x - \frac{1}{2}$	$W_m = \frac{1}{10} \cdot (x - \frac{1}{2})$
Větší odtok	$\frac{1}{8}$	$x - 2$	$W_v = \frac{1}{8} \cdot (x - 2)$

Musíme určit x (celkový čas). Za tuto dobu se vypustí celá nádrž, takže:

$$
\begin{aligned}
W_m + W_v &= 1 \\
\frac{1}{10} \cdot (x - \frac{1}{2}) + \frac{1}{8} \cdot (x - 2) &= 1 && / \cdot 40 \\
4 \cdot (x - \frac{1}{2}) + 5 \cdot (x - 2) &= 40 \\
4 \cdot x - 2 + 5 \cdot x - 10 &= 40 && / + 12 \\
9 \cdot x &= 52 && / : 9 \\
x &= \frac{52}{9} h = 5\, h\ 46\, min\ 40\, s
\end{aligned}
$$

Vypuštění celé nádrže trvalo 5 hodin, 46 minut, 40 vteřin.

Úloha 6. *V raketě je x místností v prvním a y místností v druhém patře. Počet místností v prvním patře je lichý, stejně jako ve druhém. Zároveň když budeme chápat $(x,\ y)$ jako jejich největšího společného dělitele a $[x,\ y]$ jako jejich nejmenší společný násobek, platí*

$$\frac{x - 2 \cdot y + [x,\ y]}{x \cdot y} = x + y - 4 \cdot (x,\ y) + 6$$

Kolik je místností v prvním a v druhém patře?

Řešení:

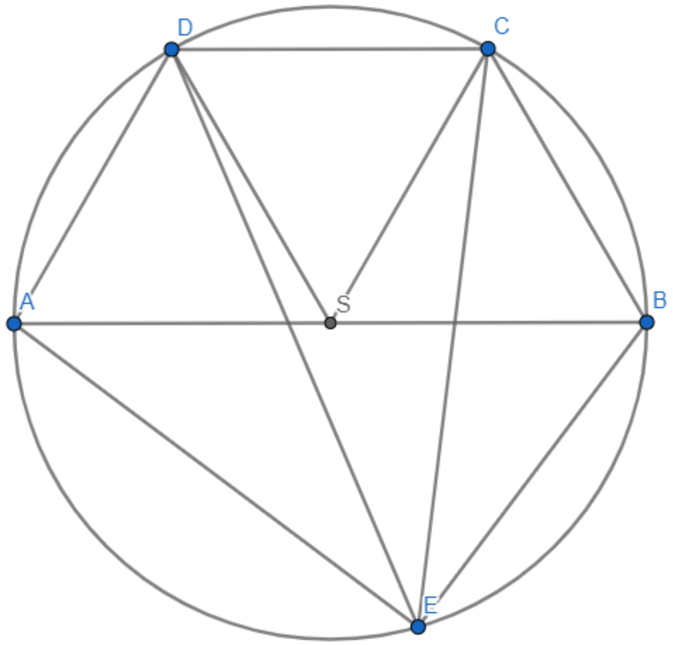
Pravá strana zadané rovnice je určitě celé číslo, takže i levá strana musí být celá. Pak $x - 2 \cdot y + [x,\ y]$ musí být dělitelné $x \cdot y$, takže musí být dělitelné jak x, tak y. Čísla x i $[x,\ y]$ jsou dělitelná x, a proto i $2 \cdot y$ je dělitelné x. Ze zadání víme, že x je liché, takže i y je dělitelné x. Podobně čísla $2 \cdot y$ i $[x,\ y]$ jsou dělitelná y, takže i x je dělitelné y. Čísla x a y se dělí navzájem, což znamená, že $x = y = (x,\ y) = [x,\ y]$. Po dosazení do zadané rovnice dostáváme:

$$\begin{aligned}
\frac{x - 2 \cdot y + [x,\ y]}{x \cdot y} &= x + y - 4 \cdot (x,\ y) + 6 \\
\frac{x - 2 \cdot x + x}{x \cdot x} &= x + x - 4 \cdot x + 6 \\
\frac{0}{x \cdot x} &= 6 - 2 \cdot x \\
2 \cdot x &= 6 \\
x &= 3
\end{aligned}$$

Vychází nám podmínka, že x i y jsou lichá, takže máme platné řešení – obě patra mají právě 3 místnosti.

Úloha 7. *Kružnici je vepsán čtyřúhelník $ABCD$, jehož dvě strany jsou rovnoběžné a jehož nejdelší strana měří 6 cm. Na kružnici leží bod E takový, že úhel AEB je pravý a úhel CED má 30°. Vypočítejte obvod čtyřúhelníku.*
(Nápověda: Nastudujte si Větu o obvodovém a středovém úhlu.)

Řešení:



Úhel AEB je pravý a všechny tyto tři body leží na kružnici, což znamená, že AB je průměr této kružnice (Thaletova kružnice nad AB).

Dvě strany čtyřúhelníku $ABCD$ mají být rovnoběžné a není možné, aby rovnoběžné byly dvě sousední strany. Proto jsou buď rovnoběžné strany AB a CD, nebo AD a BC. Druhá dvojice ale není možná, jelikož všechny čtyři body leží na kružnici, jejíž průměr je AB. Z toho vyplývá, že jsou rovnoběžné strany AB a CD.

Úhel CED má 30° a je to obloukový úhel příslušící úsečce CD. Proto středový úhel příslušící úsečce CD je 60°, přičemž střed kružnice je současně středem strany AB. Označím si střed úsečky AB jako S. Doplním úhly do trojúhelníku SCD. Ten je rovnoramenný s rameny SC a SD (S je středem kružnice a C, D leží na této kružnici). Proto jsou úhly SCD a SDC shodné. Úhly v trojhelníku dávají v součtu 180°, takže snadno dopočítám, že všechny úhly trojúhelníku SCD mají 60°, a tedy je rovnostranný.

Úsečky AB a CD jsou rovnoběžné, takže úhly ASD a SDC, resp. úhly BSC a SCD jsou střídavé, takže stejně velké (konkrétně 60°). Zároveň úsečky SA, SD, SC, SB jsou poloměry jedné kružnice, takže jsou stejně dlouhé. Proto jsou trojúhelníky DSC, ASD a BSC shodné podle věty *sus*.

Čtyřúhelník se tedy skládá ze tří rovnostranných trojúhelníků, přičemž strany dvou z nich tvoří stranu AB čtyřúhelníku $ABCD$. Strana AB je nejdelší stranou tohoto čtyřúhelníku, protože její délka je rovna průměru kružnice, což je nejdelší úsečka v kružnici. AB tedy má délku 6 cm. Z toho vyplývá, že jedna strana trojúhelníku měří 3 cm. Když je obvod obdélníku tvořen 5 stranami shodných rovnostranných trojúhelníků, je roven součtu těchto shodných stran, tedy $5 \cdot 3 = 15$ cm.

Obvod čtyřúhelníku $ABCD$ je 15 cm.