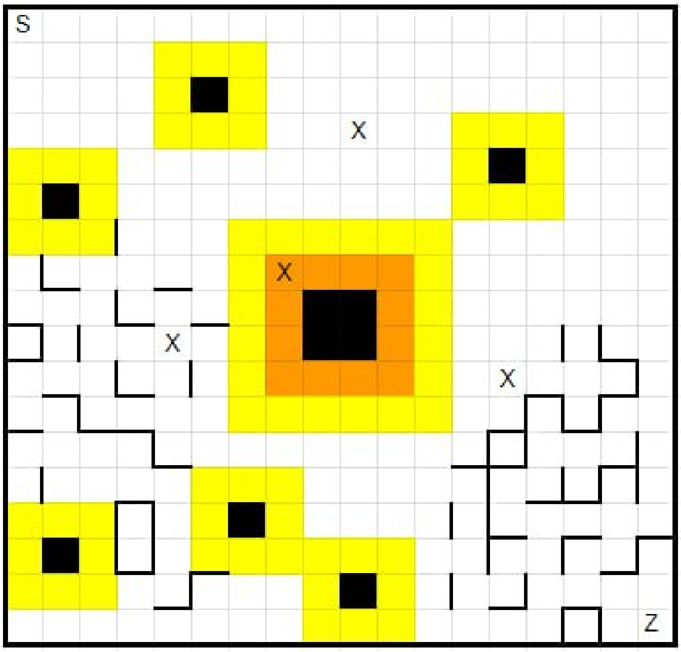
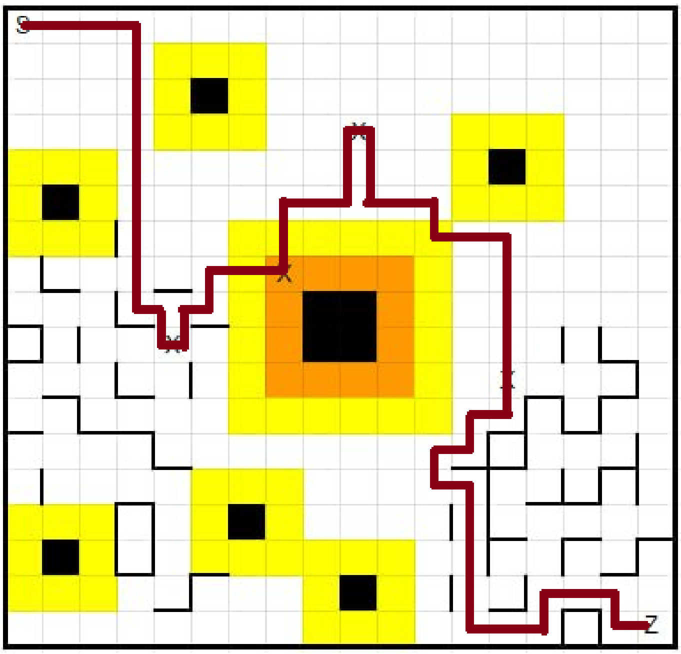
Řešení 2. série

Úloha 1. *Najděte cestu ze Země (Z) ke shluku planet (S). Cestou musíte proletět přes všechna místa označená písmenem X. Přesun do sousedního políčka mapy (doleva, doprava, nahoru a dolů, ne šikmo) trvá hodinu. Máte pouze 60 kusů Kyclia a každou hodinu spotřebujete jeden. Černá políčka jsou černé díry, kterými nelze proletět. Pokud proletíte žlutými oblastmi, čas strávený tam bude pro okolní svět dvakrát delší a spotřebujete dvakrát více Kyclia. V oranžových bude třikrát delší a spotřebujete tam třikrát více Kyclia. Černé čáry jsou asteroidy. Přes ty nelze létat.*



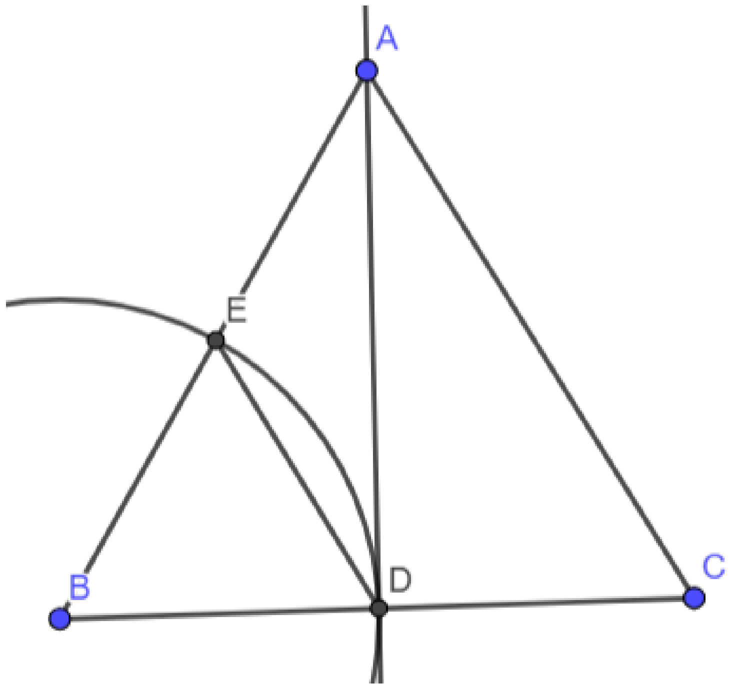
Řešení:

Jedno z možných řešení (spotřebuje 57 kusů Kyclia):



Úloha 2. *Čtečka otisků dlaní je ve tvaru trojúhelníku ABC. Osa úhlu při vrcholu A protíná stranu BC v bodě D. Kružnice se středem v bodě B a poloměrem BD protíná úsečku AB v bodě E. Jaká je velikost úhlu ACB, když $|\sphericalangle ADE| = 30°$?*

Řešení:



Označme si $|\sphericalangle CBA| = \alpha$. Body E a D oba leží na kružnici se středem B, tudíž $|BD| = |BE|$. Trojúhelník BDE je proto rovnoramenný a úhly BDE a DEB jsou stejně velké.

$$\begin{aligned}
|\sphericalangle DBE| + |\sphericalangle BDE| + |\sphericalangle DEB| &= 180^\circ \\
\alpha + 2 \cdot |\sphericalangle DEB| &= 180^\circ \\
|\sphericalangle DEB| &= 90^\circ - \frac{\alpha}{2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
|\sphericalangle DEA| &= 180^\circ - |\sphericalangle DEB| \\
|\sphericalangle DEA| &= 90^\circ + \frac{\alpha}{2}
\end{aligned}$$

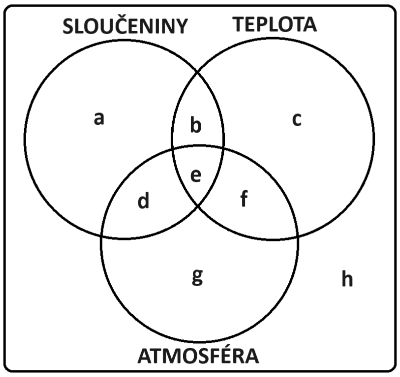
$$\begin{aligned}
|\sphericalangle ADE| + |\sphericalangle DEA| + |\sphericalangle EAD| &= 180^\circ \\
30^\circ + \left(90^\circ + \frac{\alpha}{2}\right) + |\sphericalangle EAD| &= 180^\circ \\
|\sphericalangle EAD| &= 60^\circ - \frac{\alpha}{2}
\end{aligned}$$

AD je osa úhlu BAC, takže $|\sphericalangle BAC| = 2 \cdot |\sphericalangle EAD| = 120^\circ - \alpha$.

$$\begin{aligned}
|\sphericalangle BAC| + |\sphericalangle ACB| + |\sphericalangle CBA| &= 180^\circ \\
(120^\circ - \alpha) + |\sphericalangle ACB| + \alpha &= 180^\circ \\
|\sphericalangle ACB| &= 60^\circ
\end{aligned}$$

Úloha 3. *Každá planeta, na které může být život, musí splňovat 3 podmínky. Musí na ní být přítomny základní organické sloučeniny, teplota jejího povrchu musí být přijatelná pro lidskou rasu a planeta musí mít alespoň primitivní atmosféru kvůli ochraně před kosmickým zářením.*
Organické sloučeniny má 34 planet a správnou teplotu má 36 planet. 35 planet nemá žádnou ze zadaných vlastností. Pouze 2 planety mají všechny tři vlastnosti. Správnou teplotu a současně organické sloučeniny má 6 planet a 3 planety mají zároveň organické sloučeniny a atmosféru. Pouze správnou teplotu má 1 planeta. Správnou teplotu nebo atmosféru má 65 planet. Kolik planet zkoumáme a kolik splňuje alespoň 2 podmínky?

Řešení:



Úlohu budeme řešit pomocí Vennova diagramu. Každé kolečko reprezentuje jednu vlastnost, písmena reprezentují, kolik planet splňuje právě tyto vlastnosti (tedy např. f planet má správnou teplotu i atfosféru, ale nemá organické sloučeniny). Ze zadání můžeme sestavit soustavu rovnic:

$$\begin{aligned} a+b+d+e &= 34 \\ b+c+e+f &= 36 \\ h &= 35 \\ e &= 2 \\ b+e &= 6 \\ d+e &= 3 \\ c &= 1 \\ b+c+d+e+f+g &= 65 \end{aligned}$$

Tato soustava má právě jedno řešení:

$$\begin{aligned} a &= 27 \\ b &= 4 \\ c &= 1 \\ d &= 1 \\ e &= 2 \\ f &= 29 \\ g &= 28 \\ h &= 35 \end{aligned}$$

Tudíž zkoumáme 127 planet a alespoň 2 podmínky splňuje 36 planet.

Úloha 4. *Michal a Tomáš hrají hru. Mají na hromádce 2023 sirek a postupně je odebírají, a to pokaždé buď jednu, nebo čtyři sirky. Prohrává ten, kdo nemá co brát. Kdo má vítěznou strategii, jestliže začíná Tomáš?*

Řešení:

Hráč má vítěznou strategii, jestliže bez ohledu na tahy protihráče dokáže táhnout tak, aby vyhrál.

Nejprve zkusíme spočítat, jestli ten, který je na tahu, má vítěznou nebo proherní strategii, když je na hromádce nějaký malý počet sirek (V = má vítěznou, P = nemá vítěznou).

Počet sirek	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	...	2022	2023
Stav	P	V	P	V	V	P	V	P	V	V	P	V	P		?	?

Můžeme si všimnout, že se nám stavy pravidelně opakují:

Zbytek po dělení počtu sirek 5	0	1	2	3	4
Stav	P	V	P	V	V

Abychom si byli jistí, že toto opravdu platí pro všechna čísla do 2023, musíme zkontrolovat tyto tři podmínky:

1. Z vítězného stavu se vždy můžu dostat do proherního – PLATÍ (ověříme pro zbytky 1, 3, 4)
2. Z proherního stavu se můžu dostat pouze do výherních – PLATÍ (ověříme pro zbytky 0, 2)
3. Kdo nemá co brát, prohrál (jediná podmínka ze zadání) – PLATÍ

Vidíme, že začínající má výherní strategii, pokud počet sirek na hromádce dává zbytek 1, 3 nebo 4 po dělení 5. 2023 dává zbytek 3, takže začínající, tedy Tomáš, má výherní strategii.

Úloha 5. *Proti sobě letí různou rychlostí dvě tyče. Od doby, kdy se potkají jejich začátky, do okamžiku, kdy se setkají jejich konce, uplyne 9 sekund. Pokud by jedna z nich stála, druhá by ji míjela 15 sekund. Jak dlouho by se míjely, pokud by stála ta druhá?*

Řešení:

Označme l_1 a l_2 délky tyčí a v_1 a v_2 jejich rychlosti.

To, že se obě pohybující tyče míjejí 9 sekund, znamená, že společně uletí za těchto 9 sekund vzdálenost odpovídající součtu délek obou tyčí, tedy

$$\begin{aligned} \frac{l_1 + l_2}{v_1 + v_2} &= 9 && / \cdot (v_1 + v_2) \\ l_1 + l_2 &= 9 \cdot v_1 + 9 \cdot v_2 \end{aligned}$$

Podobně to platí, i pokud by jedna z nich stála, akorát $v_2 = 0$, a tedy

$$\begin{aligned} \frac{l_1 + l_2}{v_1} &= 15 && / \cdot v_1 \\ l_1 + l_2 &= 15 \cdot v_1 \end{aligned}$$

Odtud dostáváme

$$\begin{aligned} 9 \cdot v_1 + 9 \cdot v_2 = l_1 + l_2 &= 15 \cdot v_1 \\ 9 \cdot v_1 + 9 \cdot v_2 &= 15 \cdot v_1 && / - 9 \cdot v_1 \\ 9 \cdot v_2 &= 6 \cdot v_1 && / : 6 \\ \frac{3}{2} \cdot v_2 &= v_1 \end{aligned}$$

To nyní dosadíme do dříve zjištěného vzorce

$$\begin{aligned} l_1 + l_2 &= 15 \cdot v_1 \\ l_1 + l_2 &= 15 \cdot (\frac{3}{2} \cdot v_2) \\ l_1 + l_2 &= \frac{45}{2} \cdot v_2 && / : v_2 \\ \frac{l_1 + l_2}{v_2} &= \frac{45}{2} = 22,5 \end{aligned}$$

Vidíme, že pokud by stála druhá tyč, míjely by se 22,5 sekund.

Úloha 6. *Ve čtverci o straně 1 je náhodně umístěno 65 bodů. Dokažte, že existuje kruh o poloměru $\frac{1}{5}$, ve kterém bude alespoň 5 z nich.*

Řešení:
Čtverec si rozdělíme na 16 čtverečků o straně $\frac{1}{4}$.

Uvnitř alespoň jednoho nově vzniklého čtverečku bude alespoň 5 bodů (kdyby ne, můžou být v každém čtverci maximálně 4 body, ale to by dohromady bylo $16 \cdot 4 = 64$ bodů, zbývá tedy 1 bod, který bude spolu s dalšími 4 uvnitř jednoho čtverečku).

Čtverečku (o straně $\frac{1}{4}$) obsahujícímu alespoň 5 bodů opíšeme kružnici, z Pythagorovy věty zjistíme její poloměr:

$$\begin{aligned}
(2r)^2 &= \left(\frac{1}{4}\right)^2 + \left(\frac{1}{4}\right)^2 \\
4r^2 &= \frac{1}{16} + \frac{1}{16} \\
4r^2 &= \frac{1}{8} \\
r^2 &= \frac{1}{32} \\
r &= \frac{\sqrt{2}}{8}
\end{aligned}$$

Uvnitř této kružnice s poloměrem $\frac{\sqrt{2}}{8}$ bude alespoň 5 bodů. $\frac{\sqrt{2}}{8} < \frac{1}{5}$, to znamená, že i uvnitř kruhu o poloměru $\frac{1}{5}$ se stejným středem bude alespoň 5 bodů.

Úloha 7. *Řešte rovnici* $(p_1+p_2)(p_2+p_3)(p_1+p_3)=q^n$, *kde* p_1, p_2, p_3 *a* q *jsou prvočísla a* $n \in \mathbb{N}$.

Řešení č. 1:

Některé dvě ze tří prvočísel musí mít stejnou paritu, a jejich součet musí být tedy sudý. Proto je levá, a tedy i pravá strana rovnosti sudá, z čehož dostáváme $q = 2$.

Každý činitel musí být tedy mocninou 2, a tedy buď roven 2 (což jako součet dvou prvočísel nedostaneme), nebo dělitelný 4. Modulo 4 tedy platí $p_2 = -p_1$, $p_3 = -p_1 \to 0 = p_2 + p_3 = -2p_1$, tedy p_1 dává zbytek buď 0 nebo 2, je tedy sudé, tedy rovno dvěma. Obdobně $p_2 = p_3 = 2$, čili jediným řešením je $(p_1, p_2, p_3, q, n) = (2, 2, 2, 2, 6)$.

Řešení č. 2:

Předpokládejme, že se některá dvě prvočísla, třeba p_1 a p_2, rovnají. Potom $p_1 + p_2 = 2 \cdot p_1$, a tedy q je dělitelné 2, proto $q = 2$. Zároveň q je dělitelné p_1, tedy i $p_1 = 2$ a $p_2 = p_1 = 2$. Odtud už snadno vidíme, že i p_3 musí být sudé, a tedy i to se rovná dvěma. Našli jsme řešení $p_1 = p_2 = p_3 = q = 2$, snadno ověříme, že daná rovnost pro něj platí.

Naopak, pokud se žádná z prvočísel p_1, p_2, p_3 nerovnají, můžeme bez újmy na obecnosti předpokládat $p_1 < p_2 < p_3$. Potom platí také $p_1 + p_2 < p_1 + p_3 < p_2 + p_3$. Jelikož jak $p_1 + p_3$, tak i $p_2 + p_3$ jsou mocniny q, platí

$$\begin{aligned} q \cdot (p_1 + p_3) &\le p_2 + p_3 \\ q \cdot p_1 + q \cdot p_3 &\le p_2 + p_3 && / - p_3 \\ q \cdot p_1 + q \cdot p_3 - 1 \cdot p_3 &\le p_2 \\ q \cdot p_1 + (q-1) \cdot p_3 &\le p_2 \end{aligned}$$

$q \cdot p_1$ je určitě kladné, takže

$$(q-1) \cdot p_3 \le p_2$$

Jelikož q je prvočíslo, je určitě větší než 1, a tedy dostáváme spor s předpokladem $p_2 < p_3$.

Jediné řešení je tvaru $(p_1, p_2, p_3, q, n) = (2, 2, 2, 2, 6)$.