Řešení 1. série

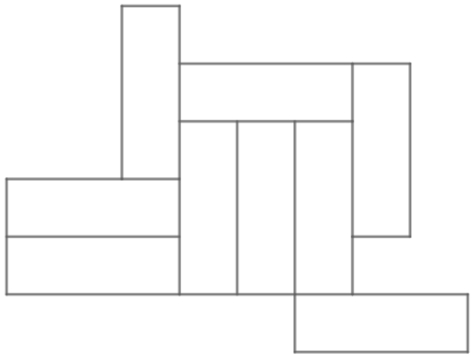
Úloha 1. *Doplňte do tabulky hodnoty mincí (1, 2, 5, 10, 20, 50) tak, aby pro každý řádek i sloupec platil zadaný součet. Políčka se stejnou mincí spolu nesmí sousedit (stranou ani rohem).*

	29	36	18	63
14				
32				
23				
77				

Řešení:

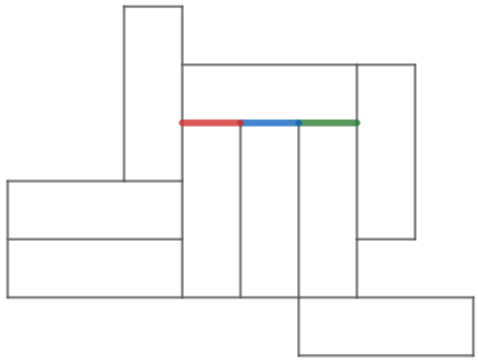
	29	36	18	63
14	2	1	10	1
32	5	20	5	2
23	2	10	1	10
77	20	5	2	50

Úloha 2. *Útvar z dlaždic se skládá ze shodných obdélníků. Má obsah 108 cm^2. Určete obvod obrazce z dlaždic.*

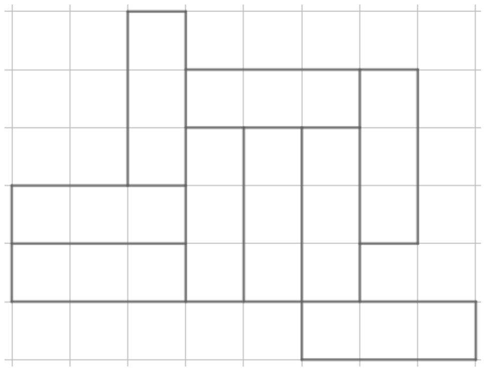


Řešení:

Z obrázku je vidět, že 3 kratší strany obdelníku jsou dohromady stejně dlouhé jako jedna delší strana.



Proto můžeme každý obdelník rozdělit na 3 shodné čtverce:



Z obrázku snadno spočítáme, že celý útvar je složen z 27 těchto čtverců. Celkový obsah útvaru je $108\,cm^2$, takže obsah jednoho čtverce je $108 : 27 = 4\,cm^2$. Strana jednoho z našich čtverců tedy musí mít $2\,cm$.

S touto informací už snadno spočítáme, že na obvodu našeho útvaru je 30 stran čtverců, a tedy celý útvar má obvod $30 \cdot 2 = 60$ centimetrů.

Úloha 3. *Násobíme čtyřciferné číslo s jednociferným číslem. Neznáme však jednotlivé cifry. Každé písmeno představuje jinou cifru. Víme, že právě 3 z těchto cifer jsou přirozená čísla. Jaké cifry se skrývají za písmeny? Své řešení zdůvodni.*

$$ABCD \cdot C = CBDB$$

Řešení:
Pokud víme, že právě 3 z cifer jsou přirozená čísla, musíme usoudit, že jedno z písmen představuje 0. A a C můžeme vyřadit hned, protože víme, že $ABCD$ a $CBDB$ jsou čísla čtyřciferná. Pokud by D bylo 0, muselo by B také být 0, protože je na jednotkách výsledku. To nemůže, protože jsou právě tři čísla přirozená, proto D nemůže být 0. Tudíž B musí být 0.

To znamená, že $D \cdot C = x0$. Jelikož C ani D nemůžou být 0, máme na C a D jenom několik možností: 2 a 5, 4 a 5, 6 a 5, 8 a 5, resp. 5 a 2, 5 a 4, 5 a 6, 5 a 8.

Nyní se podíváme na $C \cdot C + x = yD$ (kde x je je desítková část z $D \cdot C = x0$, takže určitě nezáporné). Další násobení je $C \cdot 0 + y = 0$, tedy $y = 0$. Proto $C \cdot C + x = D$, takže $C \cdot C + x \leq 9$, takže $C \cdot C \leq 9$, takže $C \leq 3$.

Jediná možnost pro C a D, kde $C \leq 3$, je $C = 2$ a $D = 5$. Z toho snadno dopočítáme $A = 1$.

Dohromady dostáváme $A = 1, B = 0, C = 2, D = 5$.

Úloha 4. *Na stránce je osm žárovek. Každá žárovka značí jednu podmínku. Pokud je podmínka splněna, žárovka svítí zeleně. Pokud ne, žárovka nesvítí. Určete podmínky a najděte číslo, které je všechny splňuje.*

`https://komar.math.muni.cz/zarovky/`

Řešení:
Podmínky:

- číslo obsahuje posloupnost čtyř sousedících členů, v níž je každý následující člen o 1 větší než ten předchozí,
- poslední trojčíslí je dělitelné 3,
- číslo neobsahuje číslici 4,
- ciferný součet čísla je menší nebo roven 30,
- první číslice je 7,
- každá číslice je v čísle maximálně dvakrát,
- číslo je dělitelné 9,
- číslo je sudé.

Tyto podmínky splňuje například číslo 7 012 356 012.

Úloha 5. *Tomášovy hodiny ukazují 6:36, Míšiny hodiny 10:36. Pomocí přesýpacích hodin změřili, že za 1 minutu na Míšiných hodinách uplynulo 67 vteřin a na Tomášových pouze 57 vteřin. Zjistěte, jaký je čas doopravdy, pokud víte, že mitóza planet proběhla včera před polednem.*

Řešení:

Celkem se hodiny rozcházejí o $7 + 3 = 10$ sekund za minutu, tedy 10 min/h, tedy 4 hodiny za 1 den.

Jelikož aktuálně jsou hodiny od sebe přesně 4 hodiny, znamená to, že mitóza proběhla přesně před 24 hodinami.

Teď můžeme úlohu řešit dvěma způsoby (je jedno, který z postupů se zvolí – vedou ke stejnému výsledku):

- Vybereme 1 hodiny a řekneme, o kolik se za 24 hodin rozešly od skutečného času:
  Míšiny hodiny: $7\,s/min = 7\,min/h = 168\,min/den = 2\,hod\ 48\,min/den$
  Tomášovy hodiny: $3\,s/min = 3\,min/h = 72\,min/den = 1\,hod\ 12\,min/den$

- Vezmeme si, o kolik se hodiny rozešly od sebe navzájem (4 hodiny, tedy 240 minut) a spočítáme to přes poměry:
  Míšiny hodiny: $\frac{7}{10} \cdot 240\,min = 168\,min = 2\,hod\ 48\,min$
  Tomášovy hodiny: $\frac{3}{10} \cdot 240\,min = 72\,min = 1\,hod\ 12\,min$

Vidíme, že Míšiny hodiny se od mitózy rozešly od skutečného času o 2 hod 48 min a Tomášovy hodiny o 1 hod 12 min.

Míšiny hodiny se předbíhají, a tedy výsledek z výpočtu musíme od času na jejích hodinách odčítat: 10:36 − 2:48 = 7:48.

Naopak Tomášovy hodiny se zpožďují, tedy výsledek musíme k času na jeho hodinách přičíst:
6:36 + 1:12 = 7:48.

Vidíme, že aktuální čas je 7:48.

Úloha 6. *Máme raketu s 5 kajutami, které mají plochu* $22\,m^2$*. Plochy jednotlivých kajut jsou přirozená čísla. První a pátá kajuta jsou stejně velké. Druhá kajuta je o 3 metry čtvereční větší než třetí a třetí kajuta je o 3 metry čtvereční větší než čtvrtá. Jak velké jsou jednotlivé kajuty? Určete všechny možnosti a ukažte, že další neexistují.*

Řešení:

Řekněme, že pátá kajuta má plochu $x\,m^2$ a čtvrtá kajuta $y\,m^2$. Potom má třetí kajuta $y + 3\,m^2$, a druhá kajuta má $y + 6\,m^2$. První kajuta má $x\,m^2$.

Raketa má plochu $22\,m^2$, takže součet těchto hodnot musí být 22 neboli platí:

$$\begin{aligned} x + (y + 6) + (y + 3) + y + x &= 22 \\ 2x + 3y + 9 &= 22 && / - 9 \\ 2x + 3y &= 13 && / : 3 \\ \frac{2}{3}x + y &= \frac{13}{3} = 4 + \frac{1}{3} \end{aligned}$$

Vidíme, že když k y přičteme kladné číslo (x je kladné, tedy i $\frac{2}{3}x$ je kladné), dostaneme $\frac{13}{3}$. Proto musí být y menší než $\frac{13}{3}$. Zároveň je y přirozené číslo, takže jediné možnosti jsou $y = 1$, $y = 2$, $y = 3$ a $y = 4$. Tyto možnosti všechny dosadíme do dřív spočítané rovnice $2x + 3y = 13$.

- $y = 1$.

$$\begin{aligned} 2x + 3 \cdot 1 &= 13 && / - 3 \\ 2x &= 10 && / : 2 \\ x &= 5 \end{aligned}$$

- $y = 2$.

$$\begin{aligned} 2x + 3 \cdot 2 &= 13 && / - 6 \\ 2x &= 7 && / : 2 \\ x &= \frac{7}{2} \end{aligned}$$

- $y = 3$.

$$\begin{aligned} 2x + 3 \cdot 3 &= 13 && / - 9 \\ 2x &= 4 && / : 2 \\ x &= 2 \end{aligned}$$

- $y = 4$.

$$\begin{aligned} 2x + 3 \cdot 4 &= 13 && / - 12 \\ 2x &= 1 && / : 2 \\ x &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Víme, že x je přirozené, takže platné jsou pouze možnosti $y = 1$ a $y = 3$. Z toho už snadno dopočítáme plochu ostatních kajut.

Existují 2 možná řešení. První z nich je, že první kajuta má plochu $5\,m^2$, druhá $7\,m^2$, třetí $4\,m^2$, čtvrtá $1\,m^2$, pátá $5\,m^2$. Druhé řešení je, že první kajuta má plochu $2\,m^2$, druhá $9\,m^2$, třetí $6\,m^2$, čtvrtá $3\,m^2$, pátá $2\,m^2$.

Úloha 7. *V budově jsou místnosti označeny čísly 1 až n. Míša tato čísla napsala na tabuli a Tomáš pak vždy náhodně vybere dvě z nich, označme je a, b, obě čísla smaže a napíše místo nich číslo $ab+a+b$. Takto postupuje, dokud nezbyde jediné číslo. Může tento výsledek být dělitelný některým z původních čísel (kromě jedničky)? Dokažte.*

Řešení:

Všimněme si, že $ab + a + b = ab + a + b + 1 - 1 = a(b + 1) + b + 1 - 1 = (b + 1)(a + 1) - 1$. Pokud tedy smažeme dvě čísla x a y, napíšeme místo nich vždy $(x + 1)(y + 1) - 1$. Pokud potom smažeme i toto číslo a nějaké jiné z, dostaneme $((x + 1)(y + 1) - 1 + 1)(z + 1) - 1 = (x + 1)(y + 1)(z + 1) - 1$ atd. Všechna čísla, která postupně budeme dostávat, budou tvaru $(a+1)(b+1)\dots(n+1)-1$ pro smazaná čísla a, b, $\dots$, n, bez ohledu na to, v jakém pořadí jsme je párovali.

Výsledek tedy bude vypadat $(1 + 1)(2 + 1)(3 + 1)\dots(n + 1) - 1 = 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot n \cdot (n + 1) - 1$. Číslo $2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot n \cdot (n + 1)$ je násobkem všech čísel od 2 až do $(n + 1)$, a tak číslo o 1 menší nemůže být dělitelné žádným z těch původních čísel.