Řešení 5. série

Úloha 1. *Vyřešte hádanku zvanou Kakuro. Doplňte do bílých polí čísla 1–9 tak, aby součet čísel ve směru určeném trojúhelníkem odpovídal číslu napsanému uvnitř trojúhelníku. Trojúhelníky se buď nachází vlevo dole ve čtverci – pak určují součet čísel v souvislých bílých polích pod nimi ve sloupci. Nebo se nachází vpravo nahoře – pak určují součet čísel v souvislých bílých polích vpravo od nich v řádku. Čísla v rámci jednoho součtu se nesmí opakovat.*

Řešení:

Úloha 2. *Martini a Giovanni hrají klasickou hru lodě. Hrají na poli 8×8 a lodě se mohou jakkoli dotýkat. Pro zjednodušení se Martini a Giovanni dohodli, že každý bude mít několik lodí tvaru 2×2 (dva sloupce, dva řádky). Jaká je optimální strategie pro takovou hru? Kolikrát musí hráč vystřelit, aby měl jistotu, že alespoň jednou zasáhl každou soupeřovu loď? Jak by měl hráč střílet, aby po prvním zásahu loď potopil, s co nejméně výstřely?*
Základní pravidla hry lodě můžete najít např. na Wikipedii:
https://cs.wikipedia.org/wiki/Lod%C4%9B#Pravidla

Řešení:
Jednotlivá políčka si očíslujeme od jedné do čtyř, počínaje jedním z rohů, například takto:

1	3	1
2	4	2
1	3	1

Jakmile takto očíslujeme celou tabulku 8×8, zjistíme, že ať loď umístíme jakkoli, vždy bude ležet na čtyřech políčkách s různými čísly. Abychom tedy měli jistotu, že alespoň jednou trefíme všechny lodě, musíme vystřelit na všechna pole se stejným číslem, např. na všechna pole s číslem 2. Tabulka má celkem 64 polí, dvojka je každé čtvrté, tedy musíme vystřelit 16krát.

Poté, co poprvé zasáhneme nepřátelskou loď, musíme vystřelit ještě pětkrát, abychom měli jistotu, že ji potopíme. Například pokud bychom zjistili, že střelba na pole 4 na obrázku byla zásah, stačí vystřelit nejprve na pole s číslem 2 a poté na pole s číslem 3 (je jedno které). Pokud byl alespoň jeden z těchto výstřelů zásah, známe polohu lodi a potopíme ji na další dva výstřely. Pokud ne, také známe polohu lodi a potopíme ji na další tři výstřely.

Zbývá ukázat, že loď nepotopíme pouhými čtyřmi výstřely. Potřebujeme třikrát zasáhnout, tedy jedno minutí musí jednoznačně určit polohu lodi. Možné polohy jsou čtyři (každá definovaná poloha lodi je určena poli 4 a jednou z jedniček). Potřebovali bychom tedy zasáhnout pole, které mají společné právě tři z těchto poloh, takové ale neexistuje.

Úloha 3. *Jako první hlavní chod byla čočka a k ní měl každý nakládanou okurku. Byly dva druhy okurek. Jeden byl menší, druhý větší. Pro jednoduchost počítejme s tím, že všechny okurky měly tvar kvádru, který měl poměr délek hran* $1:1:4$ *a všechny okurky stejného druhu byly stejně velké. Někteří dostali okurku menší, ale celou a někteří jen půlku velké okurky. Nikdo ale nebyl ošizen, protože velká okurka měla přesně dvakrát větší objem než malá okurka. Kolikrát byla velká okurka delší než ta malá?*

Řešení:

Řekněme, že malá okurka má rozměry $x \cdot x \cdot 4x$ a větší $y \cdot y \cdot 4y$. My potřebujeme zjistit, kolik je $y : x$. Objem menší okurky je $4x^3$ a větší $4y^3$. Víme ale, že:

$$4x^3 \cdot 2 = 4y^3$$
$$x^3 \cdot 2 = y^3$$

Nyní uděláme třetí odmocninu obou stran.

$$x \cdot \sqrt[3]{2} = y$$
$$\sqrt[3]{2} = y : x$$

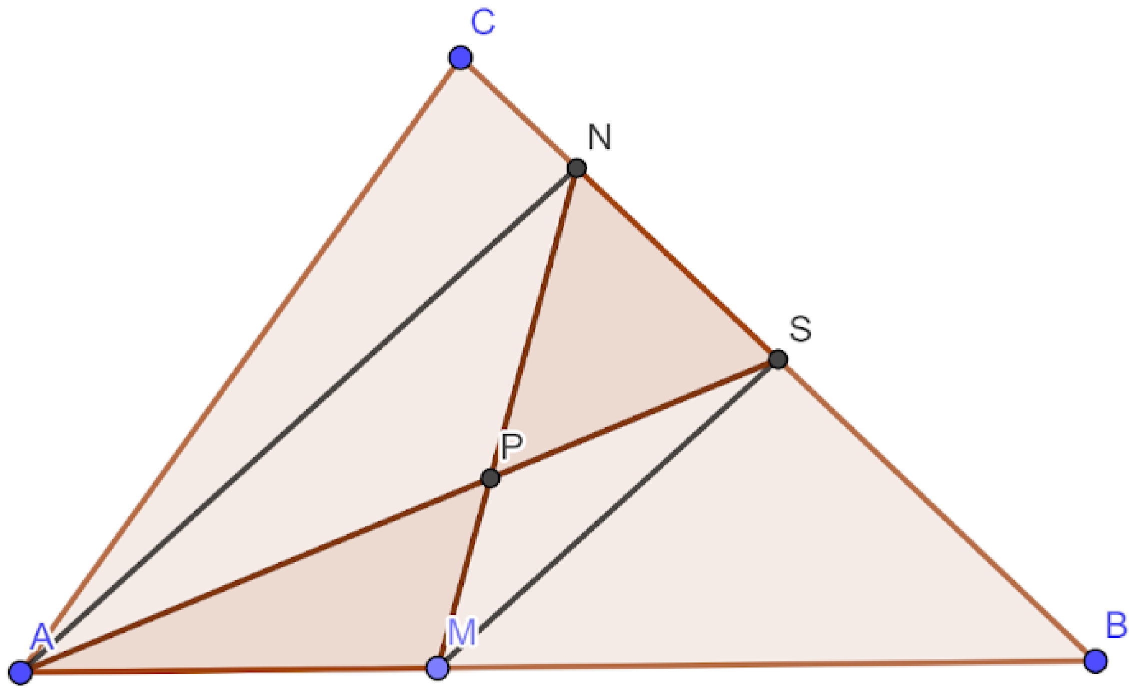
Poznámka: Toto by platilo pro jakýkoliv tvar okurky.

Úloha 4. *Na stranách AB a BC trojúhelníku ABC leží v tomto pořadí body M a N tak, že obsahy čtyřúhelníku $AMNC$ a trojúhelníku MBN se rovnají. Ukažte, že přímka procházející bodem M a středem strany BC je rovnoběžná s přímkou AN. (nápověda: udělejte si těžnici na stranu BC)*

Řešení:

Označme P průsečík přímky MN a těžnice na stranu a, tedy přímky AS, kde S je střed strany BC. Všimněme si, že trojúhelníky ABS a ASC mají stejný obsah, neboť strany BS a CS jsou stejně dlouhé a výška je v obou případech vzdálenost bodu A od přímky BC. Jelikož ze zadání víme, že i obsahy čtyřúhelníku $AMNC$ a trojúhelníku MBN se rovnají, musí se rovnat také obsahy trojúhelníků AMP a SNP.

Podívejme se na ně teď dohromady s trojúhelníkem MSP. Zjevně i trojúhelníky AMS a MSN mají stejný obsah. Jelikož sdílí stranu MS, musí mít oba i stejně dlouhou výšku na tuto stranu. Vzdálenost bodu A od přímky MS je stejná jako vzdálenost bodu N od této přímky, a proto je přímka AN s přímkou MS rovnoběžná.



Úloha 5. *Na parketě tančil každý muž během večera právě se třemi různými ženami a každá žena tančila právě se třemi různými muži. Jaký musí být poměr žen ku mužům v sále? Dokažte.*

Řešení:

Označme počet žen z a počet mužů m.

Každý muž pak tančil se třemi ženami, proto proběhlo $3m$ společných tanců. V těchto tancích figurovala každá žena třikrát, počet žen proto musí být $\frac{3m}{3} = z$, musí proto platit $z = m$.

Úloha 6. *Na tapiserii byl trojúhelník, na jehož každé straně leží delší základna lichoběžníku. Všechny tři lichoběžníky jsou si navzájem podobné a platí, že součet obsahů dvou menších je roven obsahu většího. Co musí platit, aby výsledný útvar (složený z trojúhelníku a tří lichoběžníků) měl tvar (ne nutně pravidelného) šestiúhelníku?*

Řešení:

Obsahy lichoběžníků jsou závislé na druhé mocnině stran trojúhelníku, proto lze použít zobecněnou Pythagorovu větu – neplatí jen pro čtverce nad odvěsnami a přeponou, ale i pro libovolné jiné dvojrozměrné tvary za předpokladu, že jsou si navzájem podobné a jejich rozměry jsou úměrné délce příslušné strany trojúhelníku. To pro naše lichoběžníky platí a Pythagorova věta je ekvivalentní, tedy když platí pravidlo o obsazích, musí být i daný trojúhelník pravoúhlý. Víme tedy, že trojúhelník ze zadání je pravoúhlý.

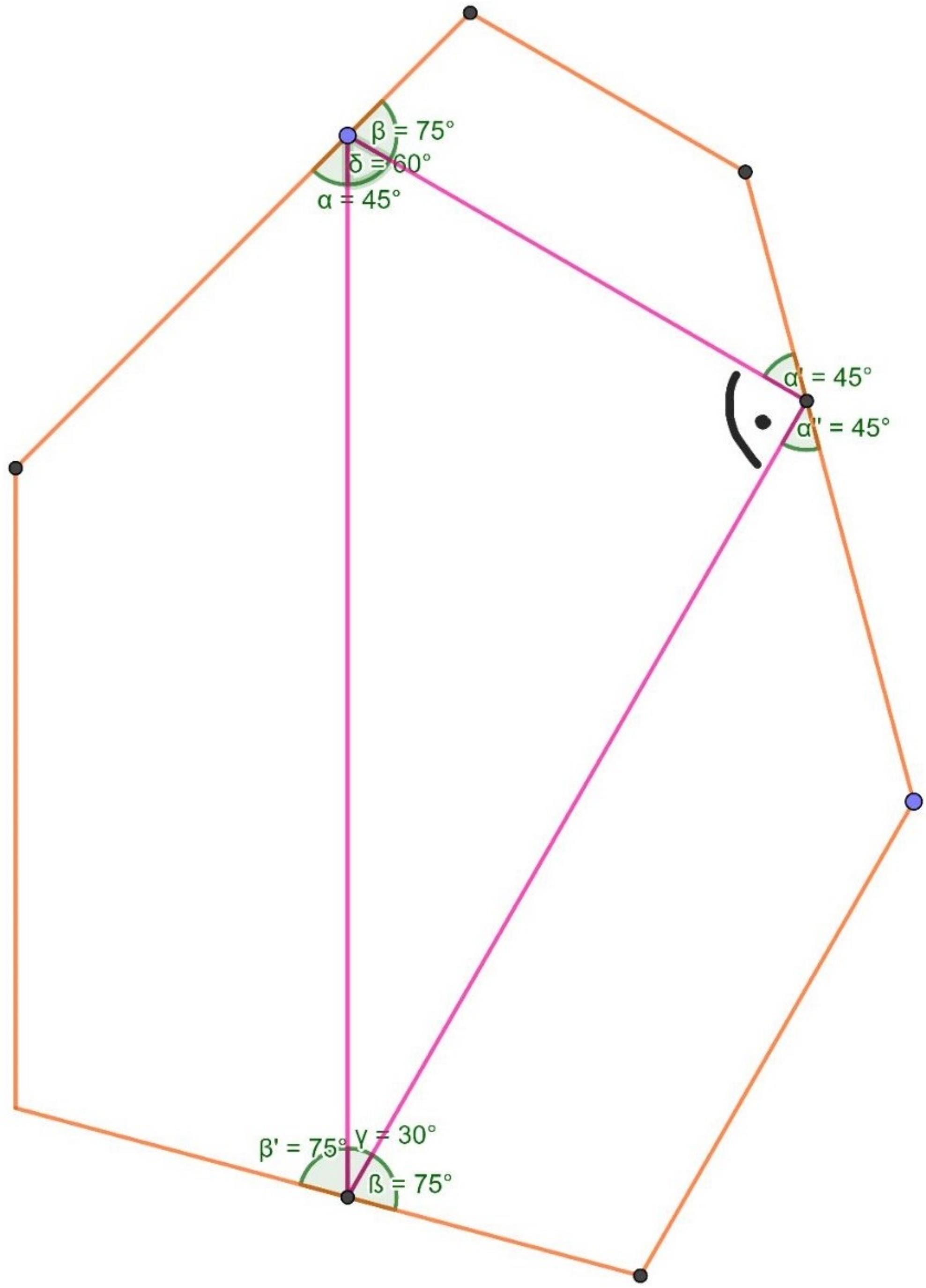
Uvažujme obecný lichoběžník, s různými úhly u delší základny (α, β). Označme zbývající úhly v trojúhelníku γ a δ. Lichoběžníky můžeme uspořádat tak, že:

- Kolem každého vrcholu trojúhelníku budou dva různé úhly (z jedné strany α, z druhé β). Tedy by i kolem pravého úhlu byly dva různé úhly, a jelikož mají spolu s úhlem u vrcholu trojúhelníku dávat úhel přímý (jednu stranu šestiúhelníku), součet $\alpha + \beta = 90°$. Jenže úhly α a β obklopují i jiné vrcholy trojúhelníku, a aby stále platilo $\alpha + \beta = 90°$, i tyto úhly vrcholů by musely být pravé. Je nesmysl mít trojůhelník s více pravými úhly, a proto tato možnost není správným řešením.
- Kolem některých vrcholů trojúhelníků jsou dva úhly shodné, a to musí být právě kolem dvou vrcholů (jinak lichoběžníky poskládat nejdou).

  1. Kolem pravého úhlu jsou různé, jinde shodné. Pokud bychom teď menší úhel v lichoběžníku označili α a menší úhel v trojúhelníku γ, dostáváme soustavu rovnic pro přímé úhly $\alpha + \beta = 90°$, $2 \cdot \beta + \gamma = 180°$, $2 \cdot \alpha + \delta = 180°$, ze součtu úhlů v trojúhelníku dostaneme $\gamma + \delta = 90°$. Tato soustava nemá v $\mathbb{R}$ řešení.

2. Kolem pravého úhlu jsou stejně velké úhly, např. α. Pak z velikosti přímého úhlu víme, že $\alpha = 45°$. Další vztahy plynoucí z ostatních přímých úhlů a součtu úhlů v trojúhelníku: $\alpha + \beta + \delta = 180°$, $2 \cdot \beta + \gamma = 180°$, $\gamma + \delta = 90°$, přičemž α známe. Tedy z prvního vztahu $\beta + \delta = 135°$, druhý upravíme na $2 \cdot \beta + 90° - \delta = 180°$, sečteme je a vznikne $3 \cdot \beta = 225°$, tedy $\beta = 75°$.

Stačí tedy volit lichoběžníky s úhly u delší základny 45° a 75° a uspořádat je tak, aby kolem pravého úhlu byly úhly shodné.



Úloha 7. *Uvnitř bylo x stříbrňáků v hodnotě tři a y zlaťáků v hodnotě pět. Určete všechny možné celočíselné počty mincí x, y, pokud platí, že hodnota všech stříbrňáků je o sedm větší než všech zlaťáků.*

Řešení:
Hodnota všech stříbrňáků je $x \cdot 3$, hodnota všech zlaťáků je $y \cdot 5$. Dostáváme tedy rovnici $3x = 7 + 5y$, neboli $3x - 5y = 7$.

Víme, že x a y jsou počty mincí, tedy musí být přirozené. Nejprve ale vyřešíme rovnici v celých číslech. Zkoumejme, kdy bude neznámá x celá v závislosti na celém parametru y

$$x = \frac{7 + 5y}{3}$$

Z toho plyne, že x bude celé, pokud 3 dělí $7 + 5y$. Zároveň ale 3 jistě dělí $6y$. Lze se snadno přesvědčit, že dělí-li nějaké číslo čísla p a q, dělí také jejich rozdíl (obecně libovolnou lineární kombinaci). Z toho plyne, že 3 dělí také $7 + 5y - 6y = 7 - y$.

Můžeme zavést substituci

$$\begin{aligned} 3m = 7 - y &\implies y = 7 - 3m \\ &\implies x = \frac{7 + 35 - 15m}{3} = 14 - 5m \end{aligned}$$

Nyní se konečně omezme na přirozená čísla a hledejme pouze taková řešení, pro která platí

$$\begin{aligned} x, y > 0 &\implies 14 - 5m > 0 \iff \frac{14}{5} > m \\ &\implies 7 - 3m > 0 \iff \frac{7}{3} > m \end{aligned}$$

Z toho plyne, že $m \leq 2$. Nyní bychom mohli skončit a prohlásit, že všechna řešení jsou tvaru $x = 14-5m$ a $y = 7 - 3m$ pro libovolné celé $m \leq 2$ a že každá taková dvojice je zároveň řešením.

Elegantnější je však vyjádřit řešení pomocí přirozeného parametru n namísto námi zvoleného m. Můžeme zavést substituci

$$m = 3 - n, \quad n \in \mathbb{N}$$

která nyní vyjadřuje přesně totéž. Po dosazení tak dostáváme řešení tvaru $x = 14 - 15 + 5n = 5n - 1$ a $y = 7 - 9 + 3n = 3n - 2$ pro libovolné $n \in \mathbb{N}$.