Řešení 4. série

Úloha 1. *Najděte pravidlo pro tvoření následujících posloupností a ve svém řešení ho popište:*

- *0, 2, 2, 4, 6, 10, 16, 26, ...*
- *1, 2, 9, 20, 35, 54, 77, ...*
- *2, 3, 5, 7, 1, 3, 7, 9, ...*
- *$\frac{1}{2}$, 1, 3, 12, 60, 360, ...*
- *1, 11, 21, 1211, 111221, 312211, 13112221, ...*
  (nápověda: nečtěte čísla jako např. tisíc dvě stě jedenáct, ale jinak, důležitý je počet číslic)

Řešení:

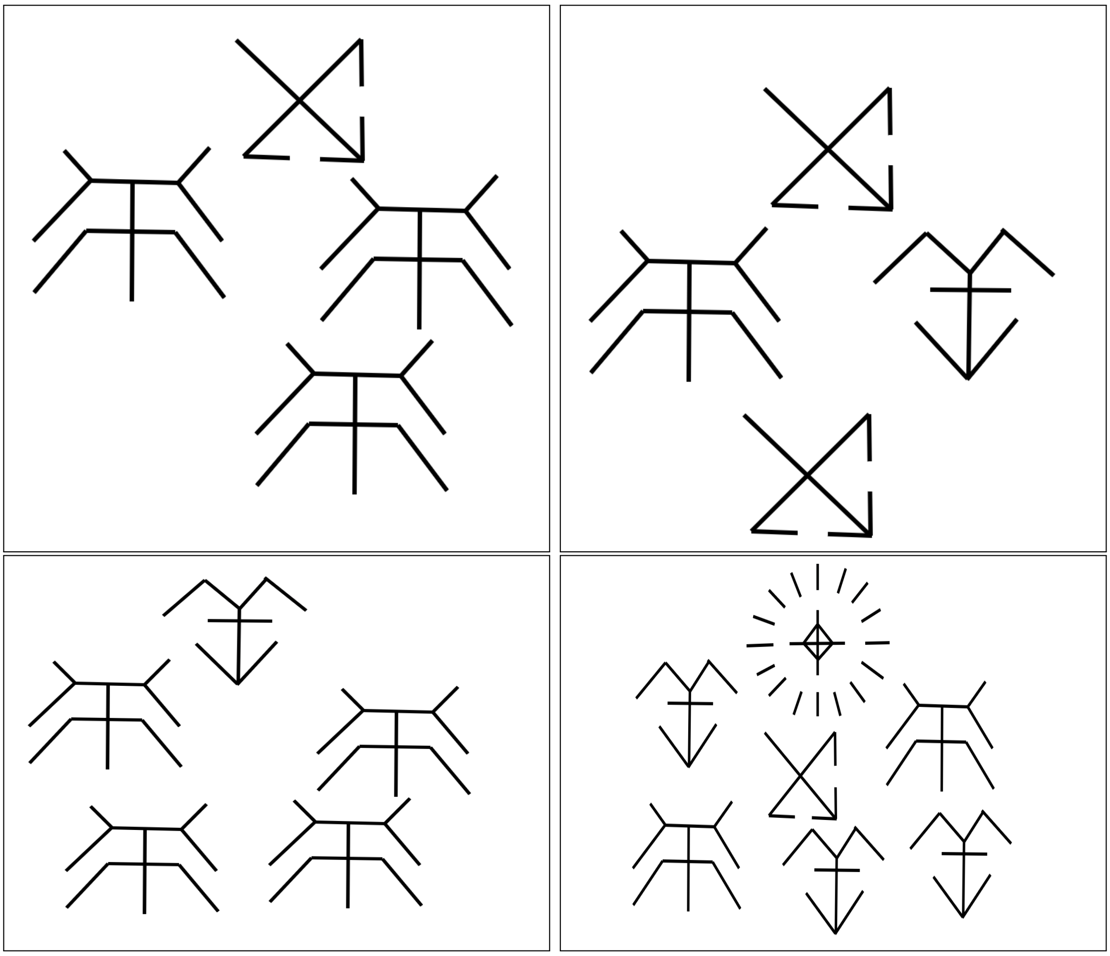
Pořadí členu v posloupnosti označme n, n-tý člen f_n. Možná pravidla pro jednotlivé posloupnosti jsou např.:

- Fibonacciho posloupnost je posloupnost, kdy každý nový člen dostaneme součtem předchozích dvou členů. Začínáme $F_1 = 0$ a $F_2 = 1$, posloupnost tedy vypadá takto: 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13 ... a její předpis je $F_{n+2} = F_n + F_{n+1}$. V naší posloupnosti je každý člen Fibonacciho posloupnosti vynásoben dvěma, tedy $f_n = F_n \cdot 2$
- Každý člen $f_{n+2} = (2n+1) * (n+2)$, $f_0 = 0$, $f_1 = 1$ (Klíčové je všimnout si, že každý člen je dělitelný číslem svého pořadí, tedy druhý dvěma, třetí třemi, čtvrtý čtyřmi ...).

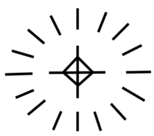
n	0	1	2	3	4	5	6
F_n	0	1	$2 \cdot 1$	$3 \cdot 3$	$4 \cdot 5$	$5 \cdot 7$	$6 \cdot 9$

- Poslední cifra prvočísel
- $f_n = \frac{n!}{2}$ (Faktoriál, značený $n!$, znamená součin všech celých čísel od 1 do n.
  Tedy například $5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$)
- $f_1 = 1$, pak už jen přepíšeme předchozí člen posloupnosti pomocí způsobu, jakým bychom ho četli. Nejprve máme 1, to přečteme jako „jedna jednička“ $\rightarrow$ tím dostaneme 11 $\rightarrow$ 11 čteme jako „dvě jedničky“, tedy dostáváme 21 $\rightarrow$ „jedna dvojka a jedna jednička“ $\rightarrow$ 1211 ... U každého členu nejprve napíšeme počet, kolikrát je daná číslice v členu za sebou, a potom napíšeme, jaká číslice to je. Takto postup opakujeme, až přečteme celé číslo. Příklad: máme člen 13112221. Přečteme ho jako 1×1, 1×3, 2×1, 3×2, 1×1. Vynecháme , a ×, čímž dostaneme, že další člen je 1113213211.

Úloha 2. *Na papíru byla spousta podivných symbolů, která vypadala jako čísla. Giovanni Moimerovi prozradil, co znamenají čtyři první znaky, ale poslední nechal na Moimerovi. Moimero ví, že první obrázek znamená číslo* 8*, druhý (vpravo nahoře) číslo* 24*, třetí (vlevo dole) číslo* -1 *a čtvrtý číslo* 36*. Zároveň ví, že každý ze symbolů reprezentuje celé číslo.*



Zjistětě, co znamená tento symbol z posledního obrázku:



Řešení:
Náhodné rozmístění znaků spolu se zadáním napovídá, že půjde o nepoziční početní soustavu – každý ze symbolů na obrázku tedy reprezentuje určitou hodnotu bez ohledu na jeho umístění. Když pak tyto hodnoty sečteme, vyjde nám číslo, které máme v zadání. Z prvních tří obrázků získáváme tři rovnice o třech neznámých:

$$\begin{aligned} a + 3b &= 8 \\ 2a + b + c &= 24 \\ c + 4b &= -1 \end{aligned}$$

Z první rovnice dostaneme $a = 8 - 3b$, z třetí $c = -1 - 4b$. To můžeme dosadit do druhé rovnice:

$$\begin{aligned} 2a + b + c &= 24 \\ 2(8 - 3b) + b + (-1 - 4b) &= 24 \\ 16 - 6b + b - 1 - 4b &= 24 \\ -9b &= 9 \\ b &= -1 \end{aligned}$$

Řešením této soustavy je $a = 8 - 3b = 8 + 3 = 11$, $b = -1$, $c = -1 - 4b = -1 + 4 = 3$.
Tyto hodnoty dosadíme do čtvrtého obrázku (=rovnice) a vyjde, že poslední symbol znamená 18 (nebo $\cdot 2$).

Úloha 3. *Martini chce sestavit čtyřčíselný kód a ví, že případný zloděj bude mít k dispozici všechny obsažené číslice, jen nebude vědět, která je v kódu kolikrát a v jakém jsou pořadí. Kolik různých číslic je nejvýhodnější zvolit, aby bylo co nejvíce možností kódu, které musí zloděj vyzkoušet? Např. pokud by náš kód byl* 3213*, tak zloděj ví, že jsme použili číslice* 1*,* 2 *a* 3*, ale neví, kterou kolikrát a v jakém pořadí.*

Řešení:

Rozeberme si postupně všechny možné případy.

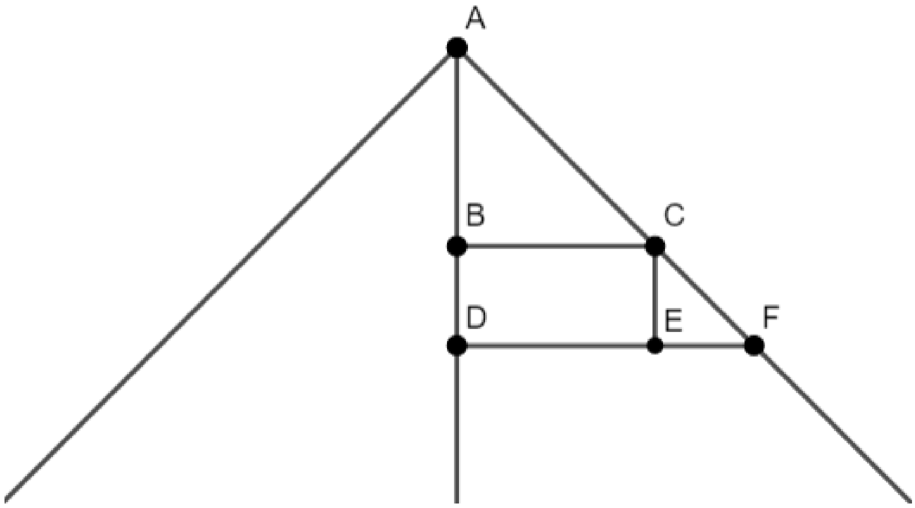
1. Pokud má náš kód čtyři stejné číslice, je zjevně jen jedna možnost, kterou zloděj musí vyzkoušet.
2. Pokud jsme použili dvě různé číslice x a y, existují tři možnosti četnosti jednotlivých číslic:
   - Použili jsme každou číslici dvakrát — pak je potřeba vždy vybrat, na kterých dvou pozicích je číslice x, na zbylých dvou bude y. Dvojici pozic je možné vybrat $\frac{4 \cdot 3}{2} = 6$ způsoby (nejprve vybereme pozici pro první číslici a pak pro druhou, dvěma dělíme, jelikož jsme každou dvojici pozic započítali dvakrát, jen v různém pořadí).
   - Použili jsme číslici x třikrát a y jednou. Pak jsou čtyři možnosti, na které místo zvolit y, zbytek je daný.
   - Použili jsme číslici x jednou a y třikrát. Pak jsou opět čtyři možnosti jako v předchozím případě.

   Dohromady je tedy $6 + 4 + 4 = 14$ možností.
3. Pokud jsme použili tři různé číslice, musí zloděj nejprve uhodnout, kterou jsme použili dvakrát. Předpokládejme, že zloděj hádá kombinaci, kde je jednou číslice x, jednou y a dvakrát z. Jsou tedy čtyři možnosti, na kterou pozici dát x, tři možnosti pro y a zbytek je dán jednoznačně. Má tedy $4 \cdot 3$ možností. Jelikož na zvolení číslice, která bude v kódu dvakrát, existují tři možnosti, celkem jde o $4 \cdot 3 \cdot 3 = 36$ možností.
4. Pokud náš kód obsahuje čtyři různé číslice, každou právě jednou, musí zloděj hádat jen jejich pořadí. Na první místo kódu může umístit čtyři různé číslice, na druhé pak jen tři, na třetí dvě a na poslední místo mu jedna zbyde. Celkem má tedy $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$ možností, které musí vyzkoušet.

Nejbezpečnější je třetí varianta, tedy použít tři různé číslice.

Úloha 4. *Golgota byla hora ve tvaru rotačního kuželu se sklonem 45°. Aby Římané Ježíše potrápili, nechali ho nést kříž dlouhou dobu. Vybrali si náhodný bod na povrchu tohoto kužele (hory) a z tohoto místa ho nechali jít. Horu obešel dokola po vrstevnici (obešel horu bez toho, aby nikde nestoupal ani neklesal) a tím se vrátil na původní místo. Kolik metrů by musel vyjít směrem k vrcholu po příchodu na to náhodně vybrané místo, aby pak jeho pochod kolem hory byl o kilometr kratší (startoval by z toho nového místa a opět by šel po vrstevnici zpět na místo, odkud vyšel)?*

Řešení:



Toto je průřez horou. Bod F je ten náhodně vybraný a C je ten, ke kterému by Ježíš vyšel, aby šel o kilometr méně. Bod E je na takovém místě, že $|DF| - |EF| = |BC|$ a AD je rovnoběžná s CE. Obě trasy mají tvar kružnice. Ta, kterou Ježíš šel, má poloměr $|DF|$ a ta, kterou by šel, má poloměr $|BC|$. Nyní můžeme spočítat vzdálenost $|EF|$.

$$\begin{aligned} 2\pi|DF| - 1 &= 2\pi|BC| && / : 2\pi \\ |DF| - \frac{1}{2\pi} &= |BC| && \text{(využijeme tu předem zmíněnou rovnici } |DF| - |EF| = |BC|\text{)} \\ |EF| &= \frac{1}{2\pi} \end{aligned}$$

Sklon kuželu je 45°, a tedy úhly EFC a FCE mají taky 45°. Trojúhelník CEF je proto rovnoramenný. To znamená, že $|EF| = |CE| = \frac{1}{2\pi}$. V zadání se ptáme na délku úsečky $|CF|$ a tu můžeme zjistit přes Pythagorovu větu v trojúhelníku CEF.

$$\begin{aligned} |EF|^2 + |CE|^2 &= |CF|^2 \\ 2\left(\frac{1}{2\pi}\right)^2 &= |CF|^2 \\ \frac{\sqrt{2}}{2\pi} &= |CF| \end{aligned}$$

Počítali jsme v kilometrech, takže by Ježíš ještě musel do kopce vyjít $\frac{\sqrt{2}}{2\pi} \doteq 0,225$ kilometru.

Úloha 5. *Martini má nevyváženou minci s dvěma stranami – panna a orel, kde panna padá častěji. Když jí hodíme třikrát po sobě, pravděpodobnost, že padnou tři stejné znaky, je přesně* $\frac{1}{2}$*. Jaká je pravděpodobnost, že když Martini mincí hodí, padne orel?*

Řešení:
Označme si šanci, že padne orel, x. Pokud nepadne orel, padne panna, takže šance, že padne panna je $1-x$. Šance, že padne třikrát po sobě orel, je $x \cdot x \cdot x$. A šance, že padne třikrát po sobě panna, je $(1-x)\cdot(1-x)\cdot(1-x)$. Víme, že tyto dvě šance dávají v součtu 50 %, tedy 0,5. To můžeme dosadit do rovnice:

$$\begin{aligned} x \cdot x \cdot x + (1-x)\cdot(1-x)\cdot(1-x) &= 0,5 \\ x^3 - x^3 + 3x^2 - 3x + 1 &= 0,5 \\ 3x^2 - 3x + 1 &= 0,5 \qquad\qquad / - 0,5 \\ 3x^2 - 3x + 0,5 &= 0 \end{aligned}$$

Tuto kvadratickou rovnici vyřešíme pomocí diskriminantu:

$$\begin{aligned} D &= b^2 - 4ac \\ D &= (-3)^2 - 6 \\ D &= 3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{-b+\sqrt{D}}{2a} \\ x_1 &= \frac{-(-3)+\sqrt{3}}{2\cdot 3} \\ x_1 &= \frac{3+\sqrt{3}}{6} \\ x_1 &= \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{6} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_2 &= \frac{-b-\sqrt{D}}{2a} \\ x_2 &= \frac{-(-3)-\sqrt{3}}{2\cdot 3} \\ x_2 &= \frac{3-\sqrt{3}}{6} \\ x_2 &= \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{6} \end{aligned}$$

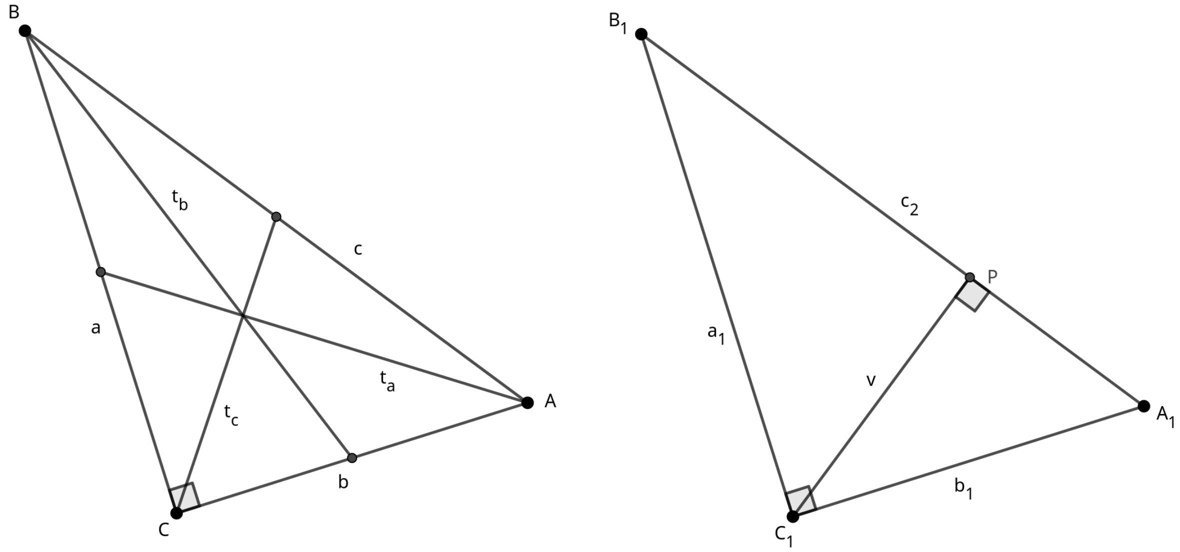
Vyšla nám dvě možná řešení, x_1 je ale větší než jedna polovina, a my víme, že orel padá méně často než panna, takže šance na jeho spadnutí bude menší než jedna polovina, a správné řešení musí být $x_2 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{6}$, což je přibližně 21 % (mimochodem, $x_1 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{6}$ je šance na spadnutí panny).

Úloha 6. *V pravoúhlém $\triangle ABC$ s pravým úhlem u vrcholu C lze kvadrát délky strany c vyjádřit pomocí a a b jako*

$$c^2 = a^2 + b^2$$

Najděte podobný vzorec také pro kvadrát výšky v_c^2 vyjádřené pomocí v_a a v_b a těžnice t_c^2 vyjádřené pomocí t_a a t_b.

Řešení:



Střed strany a označíme S_a. Střed strany b označíme S_b. Střed strany c označíme S_c. Trojúhelníky CS_bB a CAS_a jsou pravoúhlé. Těžnice tedy můžeme z Pythagorovy věty vyjádřit jako

$$\begin{aligned} t_b^2 &= a^2 + \frac{b^2}{4} \\ t_a^2 &= b^2 + \frac{a^2}{4} \end{aligned} \tag{1}$$

Střed kružnice opsané pravoúhlého trojúhelníku leží na jeho přeponě, tedy straně c. Jelikož jeho vzdálenost od bodů A a B musí být stejná, je tento bod středem S_c strany c. Proto platí:

$$t_c = \frac{c}{2} \tag{2}$$

Sečteme-li nyní rovnice (1) dostáváme

$$\begin{aligned} t_a^2 + t_b^2 &= a^2 + b^2 + \frac{b^2}{4} + \frac{a^2}{4} \\ t_a^2 + t_b^2 &= c^2 + \frac{c^2}{4} \\ t_a^2 + t_b^2 &= \frac{5}{4}c^2 \end{aligned}$$

kde v předposledním kroku jsme použili Pythagorovu větu pro $\triangle ABC$. Nyní stačí dosadit s použitím rovnice (2)

$$t_c^2 = \frac{c^2}{4} = \frac{1}{4} \cdot \frac{4}{5}\left(t_a^2 + t_b^2\right) = \frac{1}{5}\left(t_a^2 + t_b^2\right)$$

V druhé části úlohy využijeme podobnosti $\triangle ABC \sim \triangle CBP$ (podle věty uu):

$$\frac{v}{b} = \frac{a}{c} \implies v^2 = \frac{a^2b^2}{c^2} = \frac{a^2b^2}{a^2+b^2}$$

kde v posledním kroku jsme využili Pythagorovu větu. Strany a a b jsou samozřejmě v pravoúhlém trojúhelníku i příslušnými výškami v_b a v_a.

Celkem tak dostáváme vztahy

$$t_c^2 = \frac{1}{5}\left(t_a^2 + t_b^2\right)$$
$$v_c^2 = \frac{v_a^2 v_b^2}{v_a^2 + v_b^2}$$

Úloha 7. *V kruhu stálo n lidí, kteří hráli hru. První osoba, její pozici označme 1, vyřadila člověka bezprostředně stojícího po její levici (s pozicí 2) a pokračoval člověk třetí, ten také vyřadil nejbližšího nevyřazeného po své levici a tak dále. Když se dostali zase blízko prvnímu, plynule navázali a jeli další kolo. Takto pokračovali, až zbyl jeden jediný nevyřazený člověk, Joseph. Ten se snažil přijít na to, kolik přesně lidí se tenkrát hry účastnilo, tedy kolik je n, ale nepamatoval si ani svou, vítěznou pozici p_v. Věděl jen, že lidí nebylo méně než 60 a ne více než 70, že trvalo 5 kol, než se ostatní vyřadili, a že jeho pozice p_v se dala zapsat jako součet dvou druhých mocnin přirozeného čísla a k tomu ještě p_v bylo prvočíslo. Zjistěte n a p_v. (Nápověda: zjistěte si, jaký je obecný vzoreček pro vítěznou pozici Josephova problému)*

Řešení:

V kruhu jsou vždy nejprve vyřazeni všichni se sudou pozicí. Proto, když máme n, které je mocninou dvojky, v prvním kole vyřadíme půlku lidí a skončíme zase na pozici 1, pak zase půlku atd., až zbyde jen ten s pozicí 1. Přidáním libovolné mocniny dvojky k n tedy neměníme p_v. Toho využijeme a hledané n si vyjádříme jako co největší mocninu dvojky + nějaký zbytek y, $n = 2^x + y$. Pak vítěznou pozici zjistíme tak, že v kruhu vyřadíme nejprve y lidí. Potom ten, co bude na řadě, stojí na vítězné pozici, protože zbývá už jen 2^x lidí. Touto metodou tedy vyřazujeme y lidí, zároveň víme, že na začátku probíhá vyřazování tak, že vyřadíme každého sudého. Než se tedy dostaneme k vítězné pozici, projdeme od začátku $2y$ pozic, až pak dojdeme na vítěznou. Člověk, který bude na řadě po tomto vyřazování, už stojí na vítězné pozici, protože od této chvíle zbývá vyřadit už jen 2^x. Tedy $p_v = 2y + 1$.

Víme, že n je z intervalu $\langle 60,\ 70\rangle$, a hledáme co největší x takové, že 2^x není větší než n z tohoto intervalu. Pokud $x = 5$, 2^x je 32, což není větší než čísla z intervalu $\langle 60,\ 70\rangle$. Pokud $x = 6$, 2^x je 64, což pro větší n z intervalu $\langle 60,\ 70\rangle$ také splňuje zadání. (Číslo x nemůže být 7 ani žádné větší číslo, protože 2^7 je větší než čísla z intervalu $\langle 60,\ 70\rangle$. Nemůže být ani menší než 5, protože pokud bychom dokázali n vyjádřit pomocí x menšího než 5, dokážeme to i pomocí $x = 5$, přičemž x má být největší možné, a tedy musí být alespoň 5). Toto x udává počet kol, které hra zabrala. Ze zadání tedy víme, že $x = 5$. Tím se okruh hledaných n zužuje na ty možnosti, kdy n vyjadřujeme pomocí 2^5, tedy když $n < 2^6$. Zároveň víme, že lidí bylo nejméně 60, takže nám zbyly tyto možnosti:

n	p_v
$60 = 2^5 + 28$	57
$61 = 2^5 + 29$	59
$62 = 2^5 + 30$	61
$63 = 2^5 + 31$	63

Případy, kdy p_v je prvočíslo, jsou 59 a 61. Zatímco 59 jako součet dvou druhých mocnin nevyjádříme*, $61 = 25 + 36$. Pozice Josepha tedy byla 61, což odpovídá počtu lidí 62.

*K důkazu, že 59 nejde napsat jako součet dvou druhých mocnin, využijeme vlastností dělitelnosti druhých mocnin. Číslo 59 dává zbytek 3 po dělení čtyřmi. Ať už máme jakékoliv číslo a, jeho zbytky po dělení čtyřmi budou 0, 1, 2 nebo 3, jak je znázorněno v tabulce. Když toto číslo a umocníme na druhou, zjistíme, že možné zbytky po dělení čtyřmi jsou jen dva, a to 0 a 1. Představme si, že máme dvě taková (obecně různá) čísla a_1^2 a a_2^2. Když sečteme $a_1^2 + a_2^2$, i jejich zbytky po dělení 4 se sčítají. Můžeme tak dostat zbytek 0, 1 nebo 2, podle toho, jaké zbytky dávalo a_1^2 a a_2^2. Nikdy tak ale nezískáme zbytek 3, jaký má číslo 59, 59 tedy není součtem dvou druhých mocnin.

$a \pmod 4$	0	1	2	3
$a^2 \pmod 4$	0	1	0	1