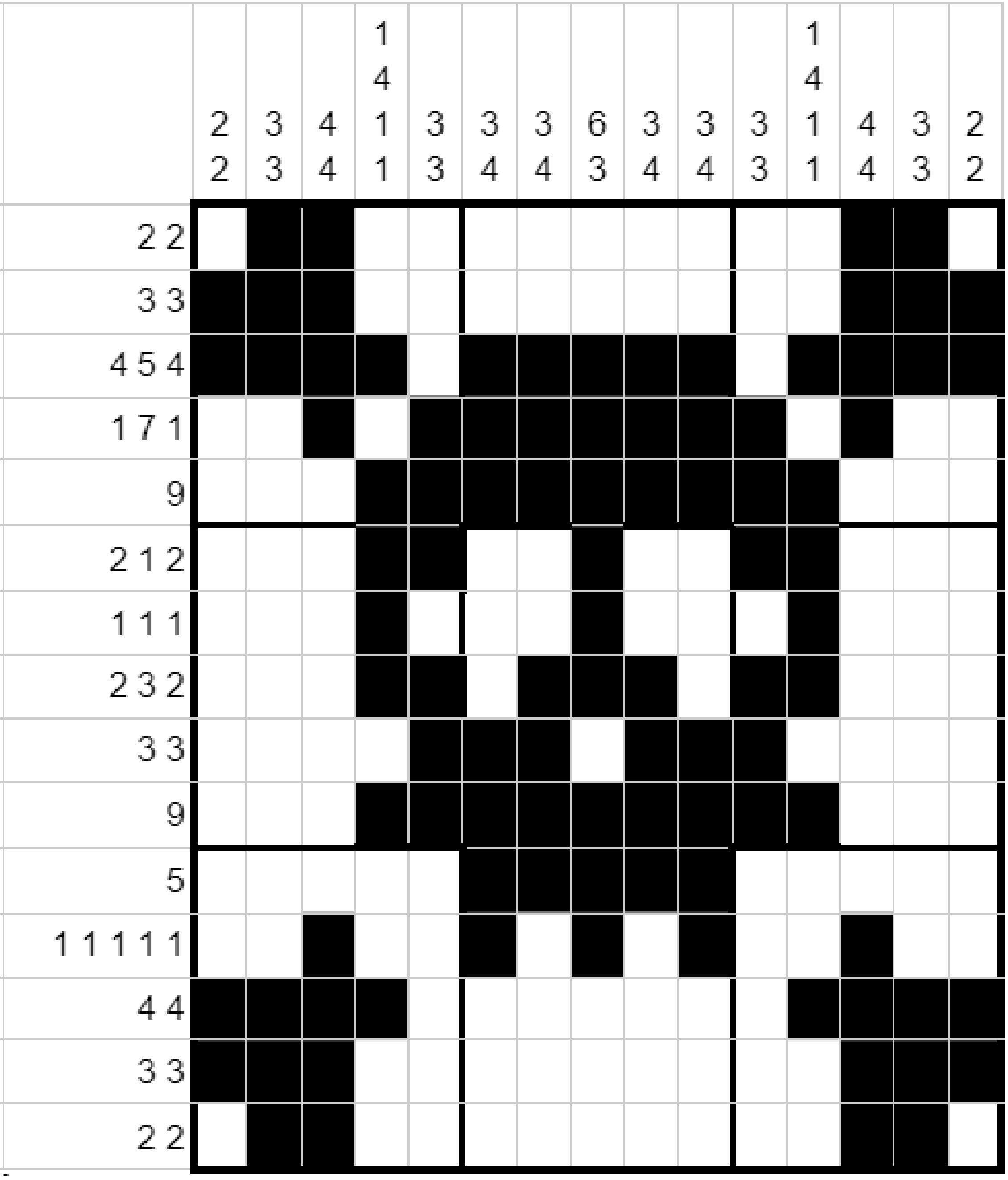
Řešení 3. série

Úloha 1. *Abyste zjistili, jaký obrázek se nacházel na dveřích, vyřešte následující nonogram. Na krajích tabulky jsou čísla, která udávají, jaký počet čtverečků má být ve sloupci nebo řádku vybarvený. Pokud je na okraji tabulky více čísel, musí mezi skupinami vybarvených čtverečků zůstat alespoň jedno políčko prázdné, přičemž skupiny mohou (ale také nemusí) začínat u okraje.*

	2 2	3 3	4 4	1 4 1 1	3 3	3 4	3 4	6 3	3 4	3 4	3 3	1 4 1 1	4 4	3 3	2 2
2 2															
3 3															
4 5 4															
1 7 1															
9															
2 1 2															
1 1 1															
2 3 2															
3 3															
9															
5															
1 1 1 1 1															
4 4															
3 3															
2 2															

Řešení:


1 4 1 1
1 4 1 1
2 2
3 3
4 4
3 3
3 4
3 4
6 3
3 4
3 4
3 3
4 4
3 3
2 2
2 2
3 3
4 5 4
1 7 1
9
2 1 2
1 1 1
2 3 2
3 3
9
5
1 1 1 1 1
4 4
3 3
2 2

Úloha 2. *Máme tabulku 5×3, na kterou někdo z kostek vyskládával digitální číslice (tak, jak jsou znázorňovány standardně). Jednu konkrétní číslici dotyčný vyskládal a kostky přilepil. Bohužel se však všechny kostky kromě jedné odlepily. Na základě pozice poslední neodlepené kostky Moimero konstatoval, že zde byla vyskládána sudá číslice. Poté spočítal popadané kostičky a tvrdil, že jen z jejich počtu nelze číslici jednoznačně určit. Chvíli umísťoval poslední kostičku střídavě na obě možná místa – nemohl se totiž rozhodnout mezi dvěma možnostmi, až nakonec zariskoval a kostičku umístil na spodnější políčko. Kterou číslici Moimero vyskládal?*

Řešení:

Pozice v tabulce si označíme následovně:

	A	B	C
1			
2			
3			
4			
5			

Jediné políčko, na které zasahují jen sudé číslice, je A4. Zasahují tam 0, 2, 6 a 8. Vyskládaná číslice tedy musí být jedna z těchto. Dále víme, že celkový počet kostiček je stejný pro více číslic – kdyby nebyl, byli bychom schopni číslici jednoznačně určit z počtu kostiček. Číslice 0 je vyskládaná z 12 kostiček, 2 z 11, 6 z 12, 8 z 13. Vidíme tedy, že dvě uvažované možnosti jsou 0 a 6. Jediný rozdíl mezi 0 a 6 je, jestli poslední kostičku umístíme na B3, nebo C2. Spodnější je políčko B3 a takto nám vznikne číslice 6.

Úloha 3. *Máme rovnost $(((a\square 1)\square 2)\square 3)\square 4 = b$. Místo každého $\square$ doplníme jedno ze znamének $+$, $-$, $\times$ nebo $:$ tak, aby se znaménka v rovnici neopakovala. Najděte:*

- *způsob, jak doplnit znaménka, aby když a bude sudé, bylo sudé i b, a když a bude liché, bylo liché i b,*
- *způsob, jak doplnit znaménka, aby když a bude celé, b bylo liché,*
- *způsob, jak doplnit znaménka, aby když a bude sudé, b bylo celé, ale když a bude liché, b nebylo celé,*
- *způsob, jak doplnit znaménka, aby když a bude liché, b bylo celé, ale když a bude sudé, b nebylo celé,*
- *3 různé způsoby, jak doplnit znaménka, aby když a bude celé, b bylo sudé.*

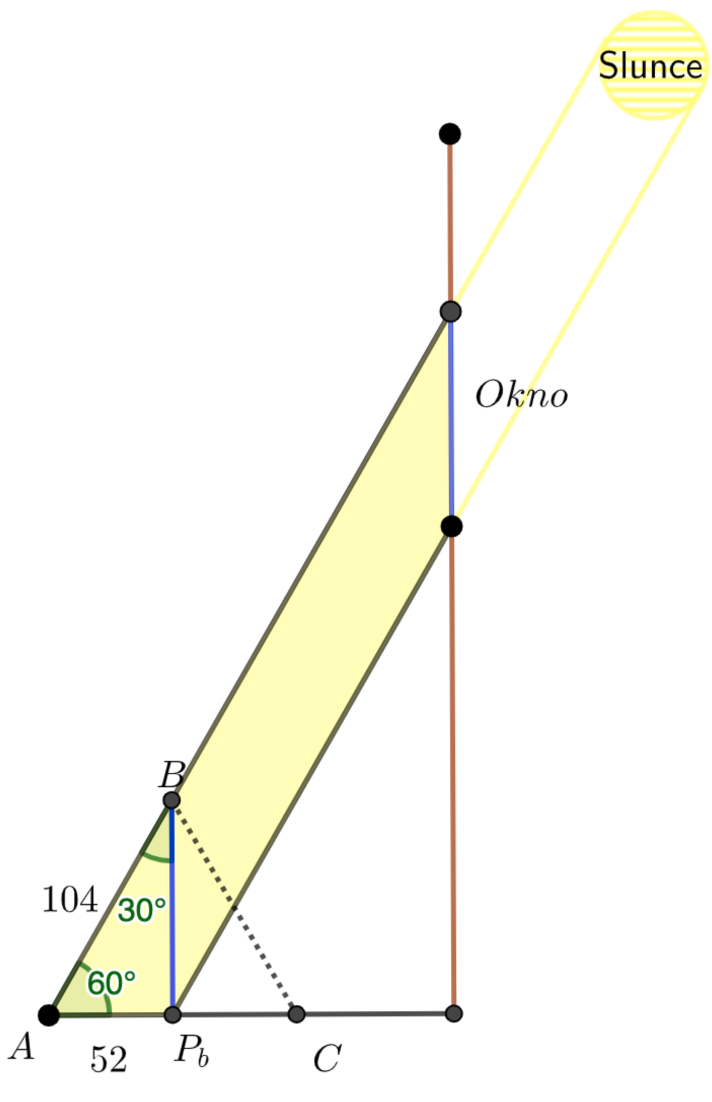
Zároveň vždy zdůvodněte, proč vámi navržený způsob vyhovuje zadání.

Řešení:

- $(((a : 1) + 2) \times 3) - 4 = b$ nebo $(((a : 1) - 2) \times 3) + 4 = b$
  Tím, že číslo vydělíme 1, se nezmění. Když k němu přičteme/odečteme sudé číslo, jeho parita (=jestli je sudé nebo liché) se nezmění. Stejně tak, když ho vynásobíme lichým číslem, tak se jeho parita nezmění. Takže žádná z použitých operací nemění paritu čísla, neboli a má stejnou paritu jako b.
- $(((a : 1) \times 2) + 3) - 4 = b$ nebo $(((a : 1) \times 2) - 3) + 4 = b$
  Tím, že číslo vydělíme 1, se nezmění. Když ho vynásobíme 2, stane se (nebo zůstane) sudým. Přičtením nebo odečtením 3 se parita mění, takže se číslo stane lichým. A přičtením nebo odečtením 4 se parita nemění, takže číslo zůstane liché, neboli b je vždycky liché.
- $(((a \times 1) : 2) + 3) - 4 = b$ nebo $(((a \times 1) : 2) - 3) + 4 = b$
  Pokud je a sudé, po vynásobení 1 se nezmění, po vydělení 2 zůstane celé, a přičítání nebo odečítání 3 a 4 na tom nic nezmění, takže b bude celé. Pokud je a liché, po vynásobení 1 se nezmění, po vydělení dvěma se ale stane zlomkem, a přičítání nebo odečítání 3 a 4 na tom nic nezmění, neboli b nebude celé.
- $(((a + 1) : 2) \times 3) - 4 = b$ nebo $(((a - 1) : 2) \times 3) + 4 = b$
  Pokud je a liché, po přičtení nebo odečtení 1 se číslo stane sudým, po vydělením 2 tedy zůstane celým, a násobení 3 a přičítání/odečítání 4 na tom nic nezmění, takže b bude celé. Pokud je a sudé, po přičtení nebo odečtení 1 se číslo stane lichým, po vydělením 2 se tedy stane zlomkem, a násobení 3 a přičítání/odečítání 4 na tom nic nezmění, takže b nebude celé.
- $(((a : 1) - 2) + 3) \times 4 = b$ nebo $(((a : 1) + 2) - 3) \times 4 = b$ nebo $(((a - 1) : 2) + 3) \times 4 = b$ nebo $(((a + 1) : 2) - 3) \times 4 = b$
  První dvojice způsobů: Tím že číslo vydělíme 1 se nezmění. Když přičteme/odečteme 2 a 3, nadále zůstane celé, takže když ho nakonec vynásobíme 4, bude sudé, neboli b bude sudé. Druhá dvojice způsobů: Pokud je a liché, po přičtení/odečtení 1 se stane sudým, takže po vydělení 2 zůstane celé, což nezmění přičtení/odečtení 3. Když ho vynásobíme 4, stane se (nebo zůstane) sudým, tedy b bude sudé. Pokud je a sudé, po přičtení/odečtení 1 se stane lichým, takže po vydělení 2 se z něj stane nějaké celé číslo plus $\frac{1}{2}$, a po přičtení/odečtení 3 jiné celé číslo plus $\frac{1}{2}$. Násobení 4 je vlastně dvakrát násobení 2. První násobení 2 z celého čísla plus $\frac{1}{2}$ udělá celé číslo, a druhé násobení 2 z tohoto celého čísla udělá sudé číslo, takže b bude sudé.

Úloha 4. *Moimero seděl ve vězení a zajímalo ho, jestli se protáhne oknem, které bylo hrozně vysoko. Chtěl změřit jeho rozměry, ale nedosáhl tam. A proto změřil světelný obdélník, který se promítnul na podlahu jeho šachty. Zjistil, že šířka obdélníku (na kterou se promítá šířka okna) je dlouhá 25 jeho palců. Výška obdélníku je 52 palců. Ví, že sluneční paprsky dopadají pod úhlem* $60°$*. Aby se jím protáhl, potřeboval by, aby okno bylo široké alespoň 20 jeho palců a vysoké alespoň 40 jeho palců. Protáhl by se Moimero tímto oknem?*
(Moimerovy palce nejsou standardizované – nepřevádějte je proto na jiné jednotky. Počítejte s tím, že slunce se nachází natolik daleko, že jeho paprsky jsou rovnoběžné, a okno se nachází na stěně kolmé k podlaze. Hledejte pravoúhlý trojúhelník a v něm buď použijte Pythagorovu větu, nebo goniometrické funkce.)

Řešení:
Šířka okna zůstane v promítnutém obrazu nezměněna. Na šířku bude tedy okno Moimerovi určitě stačit. Musíme ještě zjistit, zda i na výšku. Nejprve si nakreslíme obrázek.



Uděláme si pohled z boku. Okno si po rovnoběžných paprscích posuneme dolů – do bodů B a P_b. Díky rovnoběžnému promítání bude takto posunuté okno kolmé na podlahu a zůstane zachována délka. Všimneme si pravoúhlého trojúhelníku AP_bB.

Nyní máme více možností, jak pokračovat, buď si dokreslíme bod C, aby nám vzniknul rovnostranný trojúhelník (což můžeme udělat, díky úhlu 60° u paprsků). Pak BP_b budou výškou rovnostranného trojúhelníku, jehož strana bude dvojnásobná oproti AP_b. Tedy $|BA| = 2 \cdot 52 = 104$. Z Pythagorovy věty pak:

$$\begin{aligned} 104^2 - 52^2 &= |BP_b|^2 \\ 8112 &= |BP_b|^2 \\ \sqrt{8112} &= |BP_b| \end{aligned}$$

Nemusíme nutně vyčíslovat odmocninu z 8112, stačí nám vědět jestli je větší než 40, což provedeme prostým porovnáním čtverců:

$$\begin{aligned} 8112 &\geq 1600 \\ \sqrt{8112} &\geq 40 \end{aligned}$$

Moimero by se tedy do okna vešel.

Pokud ale řešitel nezná trik s doplněním hezkého pravoúhlého trojúhelníka na rovnostranný trojúhelník, dá se také úloha řešit pomocí goniometrických funkcí, zde funkcí tangens.

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} 60^\circ &= \frac{|BP_b|}{|AP_b|} \\ \operatorname{tg} 60^\circ &= \frac{|BP_b|}{52} \\ 52 \cdot \operatorname{tg} 60^\circ &= |BP_b| \\ |BP_b| &= 90,06\ldots \geq 40 \end{aligned}$$

Úloha 5. *Mějme množinu čísel $\{x, x+1, x+2, \ldots, x+n-1, x+n\}$ takovou, že součet všech jejích prvků je roven rozdílu druhých mocnin největšího a nejmenšího prvku (rozdíl je nezáporné číslo). Co musí splňovat číslo n, aby bylo x celočíselné?*

Řešení:

Součet všech prvků je $x(n+1) + 1 + 2 + \cdots + (n-1) + n$, což je $x(n+1) + \frac{n(n+1)}{2}$.
Rozdíl druhých mocnin největšího a nejmenšího prvku je $(x+n)^2 - x^2$ nebo $x^2 - (x+n)^2$ podle toho, která z těch druhých mocnin je větší.
Nyní pro každou z možností sestavíme rovnici, kterou vyřešíme:

1. možnost: $x^2 < (n+x)^2$

$$
\begin{aligned}
x(n+1) + \frac{n(n+1)}{2} &= (n+x)^2 - x^2 \\
xn + x + \frac{n(n+1)}{2} &= n^2 + 2xn + x^2 - x^2 && / - \frac{n(n+1)}{2} \\
xn + x &= n^2 + 2xn - \frac{n(n+1)}{2} && / - 2xn \\
x - xn &= n^2 - \frac{n(n+1)}{2} \\
x(1-n) &= n^2 - \frac{n^2}{2} - \frac{n}{2} \\
-x(n-1) &= \frac{n^2}{2} - \frac{n}{2} && / \cdot (-1) \\
x(n-1) &= -\frac{n(n-1)}{2} && / + \frac{n(n-1)}{2} \\
x(n-1) + \frac{n(n-1)}{2} &= 0 \\
(n-1)(x + \frac{n}{2}) &= 0
\end{aligned}
$$

Alespoň jedna z těch závorek musí být 0, aby ta rovnice platila. První možnost je $n-1=0$, takže $n=1$. Když $n=1$, může být x například 1, což je celočíselné a zároveň platí předpoklad $x^2 < (n+x)^2$.
Druhá možnost je $x + \frac{n}{2} = 0$, tedy $x = -\frac{n}{2}$. Aby to bylo řešení, musí stále platit:

$$
\begin{aligned}
x^2 &< (n+x)^2 \\
(-\frac{n}{2})^2 &< (n - \frac{n}{2})^2 \\
\frac{n^2}{4} &< \frac{n^2}{4}
\end{aligned}
$$

To neplatí, takže toto není řešení.

2. možnost: $x^2 > (n+x)^2$

$$\begin{aligned} x(n+1) + \frac{n(n+1)}{2} &= x^2 - (n+x)^2 \\ xn + x + \frac{n^2}{2} + \frac{n}{2} &= x^2 - n^2 - 2xn - x^2 \qquad / + 2xn + n^2 \\ 3xn + x + \frac{n^2}{2} + \frac{n}{2} + n^2 &= 0 \\ 3xn + x + \frac{3n^2}{2} + \frac{n}{2} &= 0 \\ x(3n+1) + \frac{n}{2}(3n+1) &= 0 \\ (x + \frac{n}{2})(3n+1) &= 0 \end{aligned}$$

Opět musí být alespoň jedna z těch závorek 0. První možnost je $x + \frac{n}{2} = 0$, takže $x = -\frac{n}{2}$. To zkusíme dosadit do předpokladu.

$$\begin{aligned} x^2 &> (n+x)^2 \\ (-\frac{n}{2})^2 &> (n - \frac{n}{2})^2 \\ \frac{n^2}{4} &> \frac{n^2}{4} \end{aligned}$$

Ten v tomto případě zase neplatí.

Kdyby $3n+1=0$, tak by se n muselo rovnat $-\frac{1}{3}$. To ale nesouhlasí se zadáním, ze kterého vyplývá, že n je přirozené.

3. možnost: $x^2 = (n+x)^2$

$$\begin{aligned} x(n+1) + \frac{n(n+1)}{2} &= x^2 - (n+x)^2 \\ x(n+1) + \frac{n(n+1)}{2} &= 0 \\ (x + \frac{n}{2})(n+1) &= 0 \end{aligned}$$

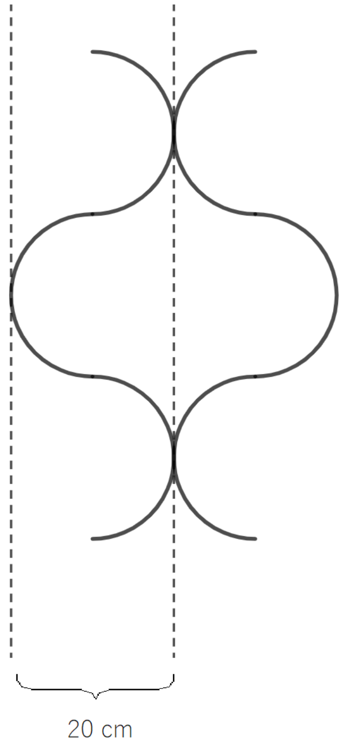
Znovu vyšla možnost $x + \frac{n}{2} = 0$, neboli $x = -\frac{n}{2}$ Dosadíme do předpokladu:

$$\begin{aligned} x^2 &= (n+x)^2 \\ (-\frac{n}{2})^2 &= (n - \frac{n}{2})^2 \\ \frac{n^2}{4} &= \frac{n^2}{4} \end{aligned}$$

To platí a proto je $x = -\frac{n}{2}$ v tomto případě validní řešení. Jde vidět, že aby bylo x celočíselné musí být n sudé. Dále se nabízí $n+1=0$, neboli $n=-1$. Pak ale n není přirozené.

Celočíselná x nám vyšla ve dvou případech, a to když je n sudé nebo 1.

Úloha 6. *Ve čtyřech dveřích do cel jsou mříže. Každé z dveří jsou 2 m vysoké a 1 m široké. Celá mříž (v každých ze dveří) se skládá z několika 20 cm širokých pruhů. Každý pruh je tvořen jednou několikrát půlkružnicově zahnutou tyčí – viz obrázek. Půlkružnice mají stejný poloměr a navazují na sebe. Mezi těmito pruhy není žádná mezera a vyplňují celé dveře. Spočítejte, kolik cm železných tyčí bylo potřeba na zhotovení mřížových dveří.*



Řešení:

Jelikož šířka pásu je 20 cm, bude poloměr půlkružnic 10 cm. Délku pásu v jedné půlkružnici tedy spočítáme jako $\frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \pi \cdot r = 10\pi$.

Okno je 200 cm vysoké, v každém pásu bude tedy $\frac{200}{20} = 10$ půlkružnic. Na jeden pás tedy připadne délka tyčí 100π cm.

Šířka okna je 100 cm, bude v něm tedy $\frac{100}{20} = 5$ pásů. Na jedno okno tedy připadne délka tyčí 500π cm.

Jelikož okna jsou 4, celkem dostáváme délku $2000\pi \doteq 6283$ cm.

Úloha 7. *Najděte všechny dvojice reálných čísel x a y splňující*

$$35x^3 - 21x^2y + 105xy^2 - 7y^3 = 399, \tag{1}$$
$$-11x^3 + 165x^2y - 33xy^2 + 55y^3 = 561. \tag{2}$$

Nápověda: Zkuste rovnice různě sčítat nebo odčítat a hledejte vzorce typu $(a+b)^n$

Řešení:

Všimneme si, že první rovnice lze podělit 7 a druhá 11

$$5x^3 - 3x^2y + 15xy^2 - y^3 = 57 \tag{3}$$
$$-x^3 + 15x^2y - 3xy^2 + 5y^3 = 51 \tag{4}$$

Nyní rovnice zkusíme sčítat a odečítat

$$\begin{aligned} (3)+(4): &\quad 4x^3 + 12x^2y + 12xy^2 + 4y^3 = 108 \\ (3)-(4): &\quad 6x^3 - 18x^2y + 18xy^2 - 6y^3 = 6 \end{aligned}$$

Po dalším podělení (první rovnice 4, druhá 6) si všimneme vzorce $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ a vzorce $(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$

$$\begin{aligned} x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3 = 27 &\quad\Longrightarrow\quad (x+y)^3 = 3^3 \\ x^3 - 3xy^2 + 3xy^2 - y^3 = 1 &\quad\Longrightarrow\quad (x-y)^3 = 1^3 \end{aligned}$$

Jelikož máme lichou mocninu, můžeme dále zjednodušit:

$$\begin{aligned} x + y &= 3 \\ x - y &= 1 \end{aligned}$$

Z čehož už jednoduchými úpravami dostáváme jediné reálné řešení $x = 2$ a $y = 1$. Jsme v cíli.