Řešení druhé série

Úloha 1. *Doplň číselné řady a svou úvahu vysvětli:*

- *2, 3, 5, 7, ...*
- *19, 17, 14, 10, ...*
- *15, 19, 23, 27, ...*
- *1, 1, 2, 6, 24, 120, ...*
- *3, 1, 4, 1, 5, 9, ...*

Řešení:

- 2, 3, 5, 7, **11** (prvních pět prvočísel)
- 19, 17, 14, 10, **5** (-2, -3, -4, -5, ...)
- 15, 19, 23, 27, **31** (+4)
- 1, 1, 2, 6, 24, 120, **720** (·1, ·2, ·3, ·4, ·5, ·6, ...)
- 3, 1, 4, 1, 5, 9, **2** (prvních sedm číslic čísla π)

Úloha 2. *Ve složkách našel Moimero útržkovité informace o hledaných zločincích.*

- *Giuseppe je hledán kvůli obchodování s kokainem,*
- *pistoli má ten, který vyhrožuje, že podpálí dům,*
- *Riccardo dělá bankovní přepadení, ale nenosí pistoli,*
- *mafiánská skupina Minestrone je známá tím, že její členové u sebe nosí mačetu,*
- *někdo pracuje pro Gnocchi a Giuseppe to není,*
- *Stefano nepracuje pro Margheritu,*
- *někdo vrhá nůž,*
- *Giuseppe u sebe nemá mačetu.*

Zjistěte všechny informace o zločincích (tedy jméno, zbraň, k jaké mafiánské skupině patří a čím se provinili).

Řešení:

Giuseppe	Riccardo	Stefano
obchodování s kokainem	přepadení banky	podpálení domu
nůž	mačeta	pistole
Margherita	Minestrone	Gnocchi

Postup (čísla v závorkách se odkazují na informaci ze zadání, kterou zrovna používáme – informace jsme očíslovali $1-8$):

1. Do tabulky zapíšeme jména zločinců,
2. Giuseppe se provinil obchodováním s kokainem (1),
3. Riccardo se provinil bankovními přepadeními (3),
4. Stefano je poslední, u koho nevíme, čím se provinil, zbývá pouze vyhrožování podpálením domu,
5. Stefano vyhrožoval podpálením domu, takže nosí pistoli (2),
6. mačetu nenosí Giuseppe (8) ani Stefano (ten nosí pistoli), takže mačetu musí nosit Riccardo,
7. Giuseppe je poslední, u koho nevíme, jakou nosil zbraň, zbývá pouze nůž,
8. mačetu nosí členové Minestrone (4), takže Riccardo je člen Minestrone,
9. Giuseppe nepracuje pro Gnocchi (5) ani pro Minestrone (pro tu pracuje Riccardo), takže Giuseppe musí pracovat pro Margheritu,
10. Stefano je poslední, u koho nevíme, pro jakou mafiánskou skupinu pracuje, zbývá pouze Gnocchi.

Úloha 3. *Moimero plul proti proudu řeky. Přesně v pravé poledne ztratil svůj oblíbený mafiánský klobouk, který se začal plavit po směru proudu řeky. Po hodině pádlování si Moimero všimnul, že mu chybí jeho klobouk. Zděsil se, otočil se a vydal se ho po proudu řeky zachránit. Rychlost řeky byla 2 km/h. Moimero dokáže na stojaté vodě pádlovat nejvýše rychlostí 6 km/h. Ví, že 5 km po směru proudu od místa, kde klobouk ztratil, je nesplavný jez. Dokázal by Moimero zachránit svůj klobouk ještě před tím, než by klobouk spadnul z okraje jezu?*

Řešení:
Označme si:
$v_m = 6\,\frac{km}{h}$ ... rychlost Moimera
$v_r = 2\,\frac{km}{h}$ ... rychlost řeky

Pádluje-li Moimero proti proudu, bude jeho rychlost $v_1 = v_m - v_r = 4\,\frac{km}{h}$.
Pádluje-li Moimero po proudu bude jeho rychlost $v_2 = v_m + v_r = 8\,\frac{km}{h}$.

Za hodinu se Moimero dostane $s_1 = v_1 \cdot 1\,hod = 4\,km$ od místa ztráty klobouku. Klobouk se za hodinu dostane $s_2 = v_r \cdot 1\,hod = 2\,km$ od místa ztráty klobouku. Klobouk má proto na Moimera „náskok“ 6 km.

Označme x jako vzdálenost, kde Moimero dohoní svůj klobouk, od místa, kde ho ztratil.

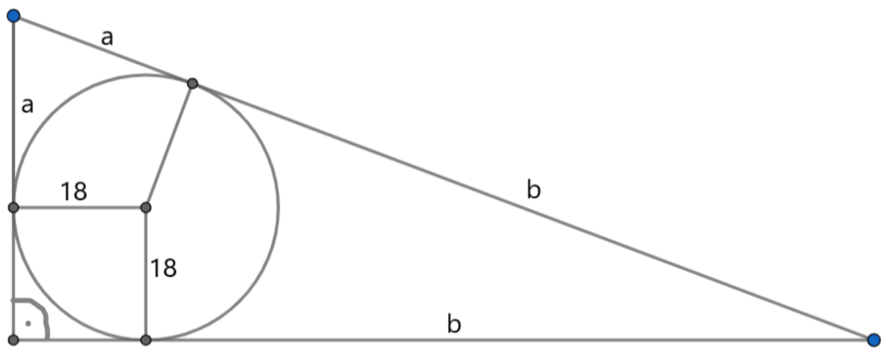
Moimero musí uplout $s_3 = x + 4\,km$, klobouk jenom $s_4 = x - 2\,km$, a to za stejný čas, proto:

$$
\begin{aligned}
t = \frac{s_3}{v_2} &= \frac{s_4}{v_r} \\
\frac{x+4}{8} &= \frac{x-2}{2} \\
2x + 8 &= 8x - 16 \\
24 &= 6x \\
4 &= x
\end{aligned}
$$

Dostihne ho tedy 4 km od místa, kde ho ztratil, což je jeden kilometr před jezem.

Úloha 4. *Náměstí Triangulare mělo tvar pravoúhlého trojúhelníku s obvodem 286 m. Poloměr základny válcové věže byl 18 m a dotýkala se všech tří stran náměstí (byla to kružnice vepsaná). Určete délky stran trojúhelníkového náměstí.*

Řešení:



Strany trojúhelníku jsou tečny ke kružnici vepsané a svírají s jejím poloměrem pravý úhel. U pravého úhlu trojúhelníku tak vznikne čtverec o straně 18 m. Zbylé útvary uvnitř trojúhelníku jsou deltoidy, mají vždy dvě a dvě strany stejně dlouhé a jeden pár protilehlých úhlů pravý.

Když si délky označíme jako na obrázku, můžeme obvod vyjádřit jako

$$\begin{aligned} 2a + 2b + 2 \cdot 18 &= 286 \\ a + b &= 125 \end{aligned}$$

Z Pythagorovy věty pak víme, že:

$$(a + 18)^2 + (b + 18)^2 = (a + b)^2$$

Máme tedy soustavu dvou rovnic o dvou neznámých:

$$a + b = 125$$

$$(a + 18)^2 + (b + 18)^2 = (a + b)^2$$

Z první rovnice vyjádříme a jako $125 - b$ a dosadíme do druhé rovnice:

$$(125 - b + 18)^2 + (b + 18)^2 = (125 - b + b)^2$$

A rovnici dále upravíme do tvaru:

$$b^2 - 125b - 2574 = 0$$

Rozkladem nebo přes diskriminant dostáváme (za předpokladu $a < b$) $b = 99$, z čehož plyne $a = 26$ a snadno dopočítáme strany $a + b = 125\,\mathrm{m}$, $a + 18 = 44\,\mathrm{m}$, $b + 18 = 117\,\mathrm{m}$.

Úloha 5. *Každý z Rady tří měl své názory. Hlasovali pro čtyři možnosti – že je to někdo úplně jiný, Giuseppe, Stefano, nebo Ricardo. Každý z Rady tří sestavil seznam pachatelů od nejpravděpodobnějšího po nejméně pravděpodobného. Minimálně dva z nich si myslí, že zlodějem je spíš někdo neznámý než Giuseppe. Zároveň si alespoň dva z rady myslí, že je to spíš Giuseppe než Stefano, a alespoň dva si myslí, že pachatelem je spíš Stefano než Ricardo. Všichni tři se ale shodují, že je to spíš Ricardo než někdo cizí. Jak vypadalo pořadí pachatelů, pro které hlasoval každý z Rady tří, aby uvedené informace byly pravdivé (jednotlivé členy Rady nerozlišujte)?*

Řešení:

Porotci:	Porotce 1	Porotce 2	Porotce 3
Nejpravděpodobnější:	Giuseppe	Stefano	Ricardo
	Stefano	Ricardo	cizí
	Ricardo	cizí	Giuseppe
Nejméně pravděpodobný:	cizí	Giuseppe	Stefano

Víme, že všichni porotci (členové Rady) si myslí, že Ricardo je zlodějem pravděpodobněji než někdo cizí. Zároveň alespoň dva si myslí, že je to spíš Stefano než Ricardo. Bez újmy na obecnosti můžeme říct, že porotci 1 a 2 si myslí, že zloděj je spíš Stefano než Ricardo (jelikož jednotlivé porotce nerozlišujeme).

Víme, že alespoň dva porotci ze tří si myslí, že zloděj je spíš Giuseppe než Stefano. Proto si alespoň jeden ze dvou porotců, kteří si myslí, že je to spíš Stefano než Ricardo, musí myslet i že je to spíš Giuseppe než Stefano. Bez újmy na obecnosti můžeme říct, že je to porotce 1.

Porotce 1 si tedy myslí, že je to spíš Giuseppe než Stefano, spíš Stefano než Ricardo a spíš Ricardo než někdo cizí. Nemyslí si tedy, že je to spíš někdo cizí než Giuseppe.

Ze zadání ale víme, že alespoň dva porotci si myslí, že je to spíš někdo cizí než Giuseppe. Proto si zbývající dva porotci (porotci 2 a 3) musí myslet, že je to spíš někdo cizí než Giuseppe.

Porotce 2 si tedy myslí, že je to spíš Stefano než Ricardo, spíš Ricardo než někdo cizí a spíš někdo cizí než Giuseppe. Nemyslí si tedy, že je to spíš Giuseppe než Stefano.

Ze zadání ale víme, že alespoň dva porotci si myslí, že je to spíš Giuseppe než Stefano. Proto si zbývající dva porotci (porotci 1 a 3) musí myslet, že je to spíš Giuseppe než Stefano.

Porotce 3 si tedy myslí, že je to spíš Ricardo než někdo cizí, spíš někdo cizí než Giuseppe a spíš Giuseppe než Stefano.

Úloha 6. *Všechny útvary, které Moimero viděl, byly pravidelné n-úhelníky se stranou délky x.*

- *Ukažte, že rovnostranný trojúhelník, který viděl, měl menší obsah než čtverec, který viděl.*
- *Ukažte, že šestiúhelník, který viděl, měl menší obsah než osmiúhelník, který viděl.*
- *Dokažte obecně: pravidelný n-úhelník o straně délky x má menší obsah než pravidelný $(n+1)$-úhelník se stejnou délkou strany. ($n > 2$; n náleží $\mathbb{N}$).*

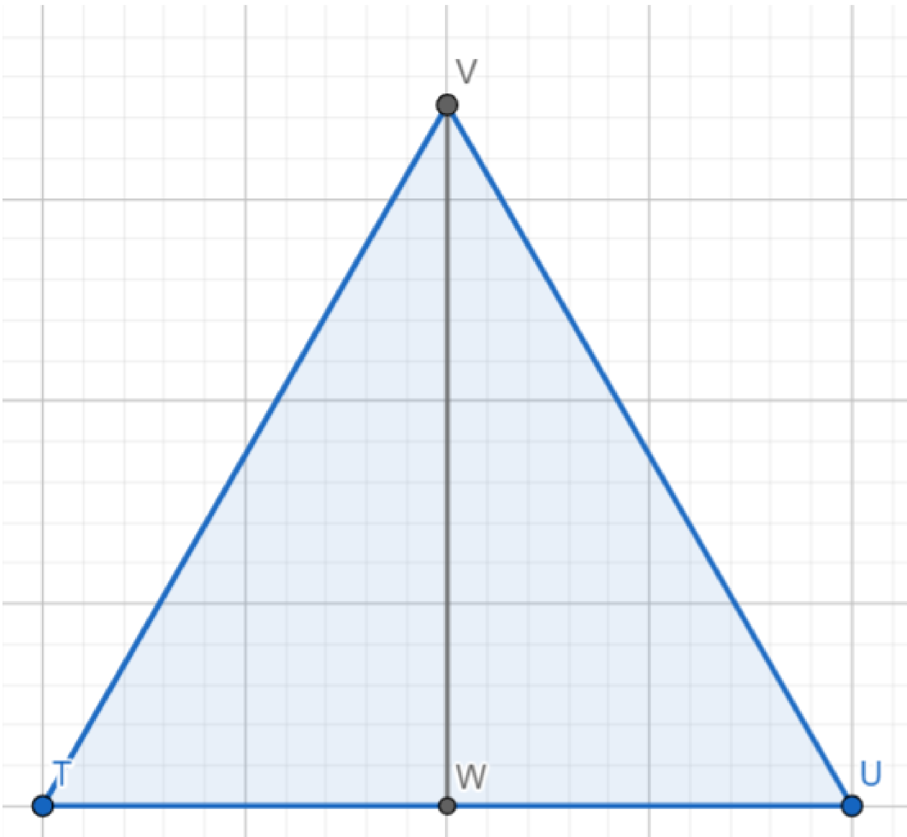
Řešení:

První podúloha:
Obsah čtverce spočítáme ze vzorce: $S = x^2$

Pro výpočet obsahu rovnostranného trojúhelníku je nejprve nutné znát jeho výšku. Mějme rovnostranný trojúhelník TUV o straně x s výškou WV. Protože je rovnostranný, výška a těžnice jsou identické, proto je délka WU polovinou x. Délku výšky spočítáme z Pythagorovy věty v trojúhelníku WUV. Obsah trojúhelníku pak vyjde:

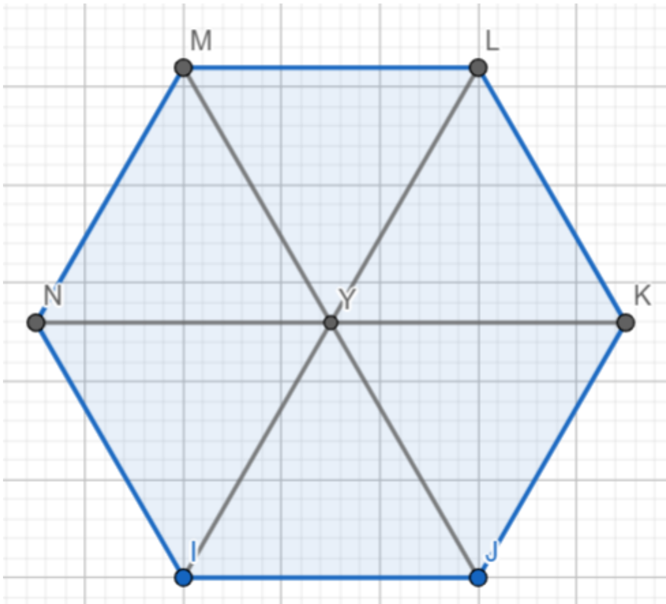
$$S = \frac{a \cdot v_a}{2} = \frac{x \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot x}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot x^2$$

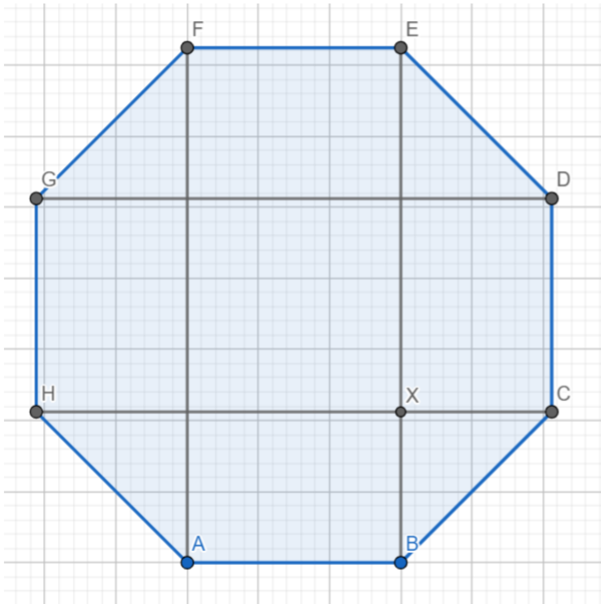
Nyní už je vidět, že pro stejné x je obsah čtverce větší.



Druhá podúloha:
Oba útvary si vhodně rozdělíme na menší útvary, jejichž rozměry známe nebo je dokážeme spočítat. Začneme pravidelným šestiúhelníkem. Ten se dá rozdělit na šest shodných rovnostranných trojúhelníků. Jejich obsah už známe z první podúlohy, obsah šestiúhelníku bude šestinásobek obsahu jednoho trojúhelníku, tedy:

$$S = 6 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot x^2 = \frac{3}{2} \cdot \sqrt{3} \cdot x^2$$





Osmiúhelník si rozdělíme na čtverec, čtyři shodné obdélníky a čtyři shodné trojúhelníky. Čtverec uprostřed má obsah x^2, pro výpočet obsahu ostatních útvarů potřebujeme zjistit délku BX (viz. obrázek). Tu získáme pomocí Pythagorovy věty v trojúhelníku BCX, který je pravoúhlý a rovnoramenný – délka BX vychází $\frac{x}{\sqrt{2}}$. Pak je obsah každého z trojúhelníků:

$$S = \frac{\frac{x}{\sqrt{2}} \cdot \frac{x}{\sqrt{2}}}{2} = \frac{1}{4} \cdot x^2$$

Zatímco u obdélníků je to:

$$S = \frac{x}{\sqrt{2}} \cdot x = \frac{x^2}{\sqrt{2}}$$

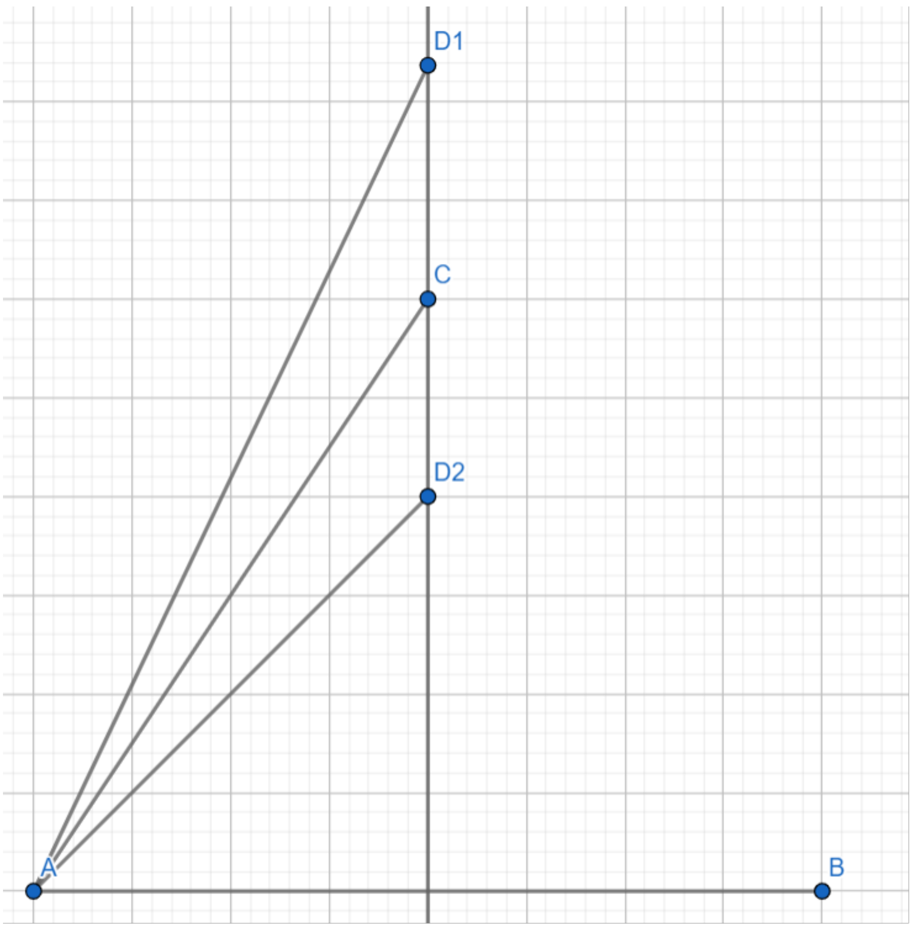
Obsah osmiúhelníku je pak roven součtu obsahů všech těchto útvarů, což je:

$$S = x^2 + 4 \cdot \frac{1}{4} \cdot x^2 + 4 \cdot \frac{x^2}{\sqrt{2}} = 2x^2 + \frac{4x^2}{\sqrt{2}}$$

To je více než obsah šestiúhelníku.

Třetí podúloha:

Jedná se o pravidelné n-úhelníky, tedy jim lze opsat kružnici. Spojme její střed se všemi vrcholy n-úhelníku. Tím rozdělíme n-úhelník na n shodných rovnoramenných trojúhelníků, všechny mají základnu délky x. Úhel u jejich vrcholu je roven $\frac{360}{n}$. Pro přehlednost tyto trojúhelníky označíme jako 1-trojúhelníky. $(n+1)$-úhelník rozdělíme stejným způsobem na $n+1$ shodných rovnoramenných trojúhelníků se základnou délky x a úhlem u vrcholu $\frac{360}{n+1}$. Tyto trojúhelníky označíme jako 2-trojúhelníky. Nyní porovnejme 1-trojúhelník a 2-trojúhelník. Oba jsou rovnoramenné a mají délku základny x, přičemž 2-trojúhelníky mají menší úhel u hlavního vrcholu. Nyní je třeba ukázat, že 2-trojúhelník má větší výšku. To lze například konstrukcí. Pokud má 2-trojúhelník menší úhel u hlavního vrcholu, má větší úhel u základny. Načrtneme si základnu a rameno 1-trojúhelníku ABC (viz obrázek). Nyní do toho stejného náčrtku umístíme 2-trojúhelník. Ten bude mít stejnou základnu, a to AB. Třetí vrchol, řekněme D, bude na ose strany AB (protože jde o rovnoramenný trojúhelník) a zároveň bude mít úhel $|\sphericalangle BAD| > |\sphericalangle BAC|$, aby bod D_1 byl v náčrtku výše než bod C. Pokud by byl úhel $|\sphericalangle BAD| < |\sphericalangle BAC|$, bod D_2 by ležel níže než bod C a výška by byla menší. Tím jsme ukázali, že 2-trojúhelník má větší výšku než 1-trojúhelník. Tedy platí, že obsah 2-trojúhelníku je větší než obsah 1-trojúhelníku. V $(n+1)$-úhelníku je tedy $(n+1)$ 2-trojúhelníků, každý má větší obsah než 1-trojúhelník, kterých je v n-úhelníku jen n. Odsud plyne, že $(n+1)$-úhelník má větší obsah než n-úhelník.



Úloha 7. *Na pozice očíslované 1 až 12 chtěli rozřadit 7 mužů a 5 dívek, kteří jsou všichni po dvou rozlišitelní (to znamená, že je od sebe dovedeme rozeznat – nejsou žádní dva stejní). Kolika způsoby to mohli udělat, jestliže nesmí stát všichni muži ani všechny ženy vedle sebe?*

Řešení:

Celkový počet možností spočteme jako rozdíl všech možností a možností zakázaných. Všech možností, jak lidi rozřadit, je

$$N_v = 12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot \dots \cdot 1 = 12!$$

Poznámka: znak ! značí faktoriál, pokud jste se s ním ještě nesetkali, můžete se dozvědět víc např. na wikipedii (https://cs.wikipedia.org/wiki/Faktoriál)

S každým výběrem člověka na pozici ubývají lidé, které můžeme zařadit na další pozici.

V zakázaných možnostech musí stát buď všichni muži, nebo všechny dívky, nebo všichni muži i všechny dívky vedle sebe. Máme tedy 3 disjunktní situace:

1. Vedle sebe stojí pouze všichni muži. Nejprve jako při spočtení všech možností výše uspořádáme muže – to je 7! možností. Dále můžeme pracovat s touto souvislou jednotkou 7 mužů. Pokud by ale jednotka mužů byla na jednom z konců řady, budou vedle sebe i všechny dívky, což spadá do 3. situace, a proto tyto možnosti zde v 1. situaci nebudeme započítávat. Jsou proto pouze 4 možnosti, kde může stát jednotka mužů. Zbývajících 5 dívek uspořádáme také jako při spočtení všech možností výše, tedy 5!:

$$N_1 = 7! \cdot 4 \cdot 5!$$

2. Vedle sebe stojí pouze všechny dívky. Vyřešíme zcela analogicky:

$$\begin{aligned} N_2 &= 5! \cdot (8! - 2 \cdot 7!) \\ &= 5! \cdot 7! \cdot 6 \end{aligned}$$

3. Vedle sebe stojí všichni muži i všechny dívky. Muži můžou stát buďto vlevo, nebo vpravo od dívek – to jsou 2 možnosti. Poté musíme uspořádat jak dívky, tak muže, tedy $5! \cdot 7!$.

$$N_3 = 2 \cdot 7! \cdot 5!$$

Celkem tedy dostáváme

$$\begin{aligned} N &= N_v - N_1 - N_2 - N_3 \\ N &= 12! - 7! \cdot 5! \cdot 12 \\ N &= 479001600 - 7257600 \\ N &= 471744000 \end{aligned}$$

Je celkem 471744000 možností, jak muže a dívky rozřadit.