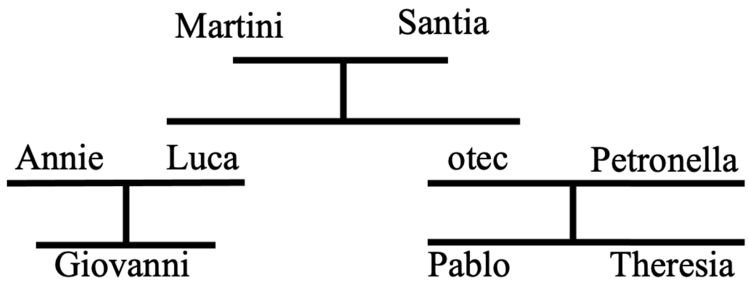
Řešení první série

Úloha 0. *Z informací z doprovodného textu nakreslete rodokmen rodiny Lasagnů.*



Úloha 1. *Náměstíčko mělo tvar čtverce 7×7. Vložte do políček tabulky číslice $1-6$ tak, aby se stejné číslice neopakovaly v žádném řádku ani sloupci. Některá pole mohou zůstat prázdná – vybarvěte černě. Čísla okolo tabulky udávají součty skupin číslic v řádcích a sloupcích (skupiny jsou vždy odděleny jedním či více prázdnými políčky) v takovém pořadí, v jakém se vyskytují v příslušných řádcích a sloupcích. Skupinou může být myšlena i jediná číslice. V jednom řádku nebo sloupci mohou být maximálně 4 mezery. Příklad vyplnění tabulky 6×6 čísly $1-5$:*

			5					
			3		6	7	10	6
			1	9	4	8	2	9
5	7	1						
		11						
	6	4						
	4	8						
3	2	4						
	1	14						

			5					
			3		6	7	10	6
			1	9	4	8	2	9
5	7	1	5	■	3	4	■	1
		11	■	■	2	3	1	5
	6	4	3	2	1	■	4	■
	4	8	■	4	■	1	5	2
3	2	4	■	3	■	2	■	4
	1	14	1	■	4	5	2	3

			2						
			5		3				6
			6	4	9	3	11	15	1
			1	6	3	11	10	6	2
	7	11							
		15							
	6	8							
	6	4							
14	2	1							
		9							
	1	20							

Řešení:

			2						
			5		3				6
			6	4	9	3	11	15	1
			1	6	3	11	10	6	2
	7	11	2	4	1	■	5	6	■
		15	■	■	2	3	6	4	■
	6	8	5	1	■	■	■	2	6
	6	4	■	2	4	■	1	3	■
14	2	1	6	3	5	■	2	■	1
		9	■	■	■	5	3	1	■
	1	20	1	■	3	6	4	5	2

Úloha 2. *Rozluštěte, co znamenají tři "nové" operace. (Nápověda - lze je popsat pomocí čtyř základních operací $+ - \times /$)*
Příklad: 5\$4 = 6   12\$17 = 7
Řešení: \$ je operace, která vynásobí první číslo dvěma a odečte druhé číslo

- $8@3 = 19$ $15@12 = 42$ $3@1 = 7$ $9@9 = 27$ $5@6 = 16$
- $5\#5 = 30$ $5\#7 = 36$ $3\#7 = 30$ $12\#8 = 60$ $7\#17 = 72$
- $3\&4 = 19$ $2\&5 = 17$ $3\&6 = 27$ $10\&5 = 65$ $1\&1 = 3$

Řešení:

- Operace @ první číslo vynásobí dvěma a poté přičte druhé číslo.
- Operace # obě čísla sečte a výsledek vynásobí třemi.
- Operace & dává součet součtu a součinu obou čísel.

Úloha 3. *Kolik existuje různých možných počtů dědiců po dědovi Martinim (počet dědiců musí být přirozené číslo), pokud rozdělí-li se mezi ně 16 milionů rovným dílem, počet milionů, co každý z dědiců dostane, bude kladné desetinné číslo, které má před desetinnou čárkou i po ní právě jednu cifru?*

Řekněme, že x je možný počet dědiců, a y je počet milionů, který každý dědic dostane, neboli $y = 16/x$. Pokud tuto rovnici vynásobíme 10, vyjde nám že $10y = 160/x$. Jelikož počet dědiců x splňoval zadanou podmínku, musí mít y po desetinné čárce právě jednu cifru, a tedy $10y$ je celé. Takže pro každé číslo x splňující zadanou podmínku platí, že $160/x$ je celé číslo, a tedy každé číslo x splňující zadanou podmínku je dělitelem 160.

Zároveň ale platí, že pokud nějaké číslo x je dělitelem 16, nesplňuje zadanou podmínku, protože $16/x$ by bylo celé, a tedy nemělo cifru za desetinnou čárkou.

Takže zadanou podmínku splňují čísla, která jsou děliteli 160, ale ne 16. Víme že $160 = 16 \cdot 2 \cdot 5 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5$. Pokud dělitel 160 nemá být dělitelem 16, musí buďto být dělitelný 5, nebo při rozložení na prvočísla mít pět dvojek (protože 16 při rozložení na prvočísla má čtyři dvojky). První pravidlo splňuje 5, $5 \cdot 2 = 10$, $5 \cdot 2 \cdot 2 = 20$, $5 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 40$, $5 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 80$ a $5 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 160$, druhé pravidlo splňuje $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 32$ a $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5 = 160$.

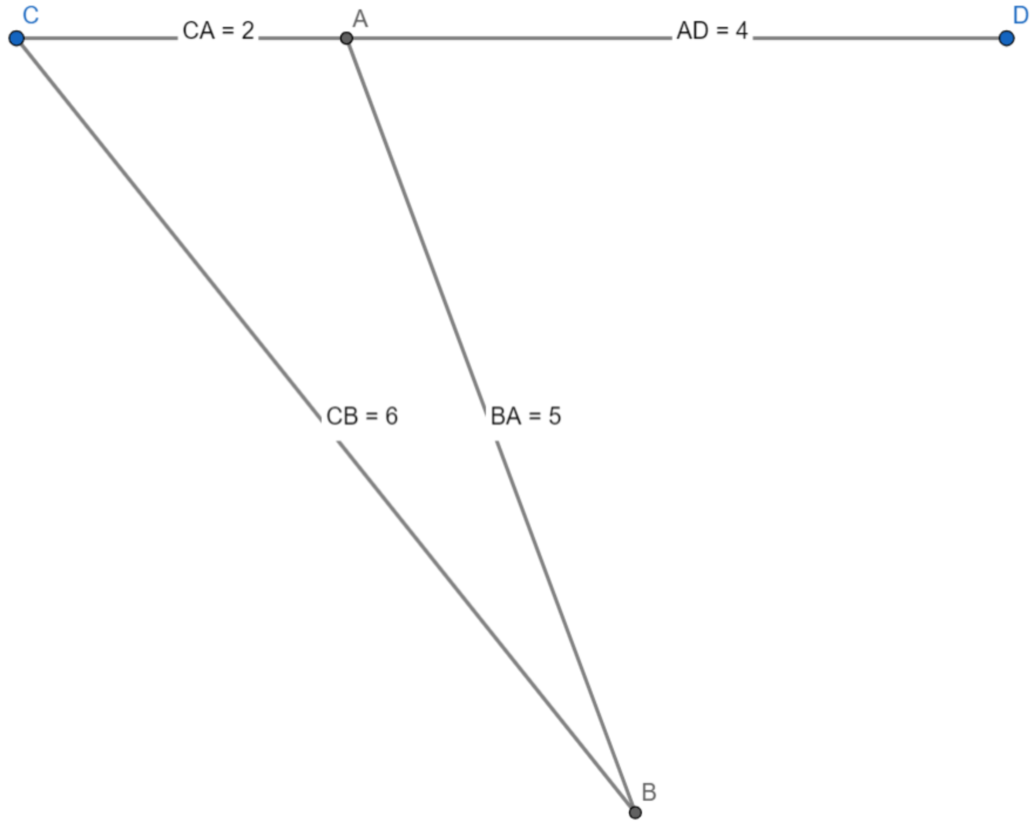
Zároveň snadno ověříme, že když 16 vydělíme těmito čísly, vyjde nám číslo které má i před desetinnou čárkou jednu cifru, což je druhá podmínka ze zadání.

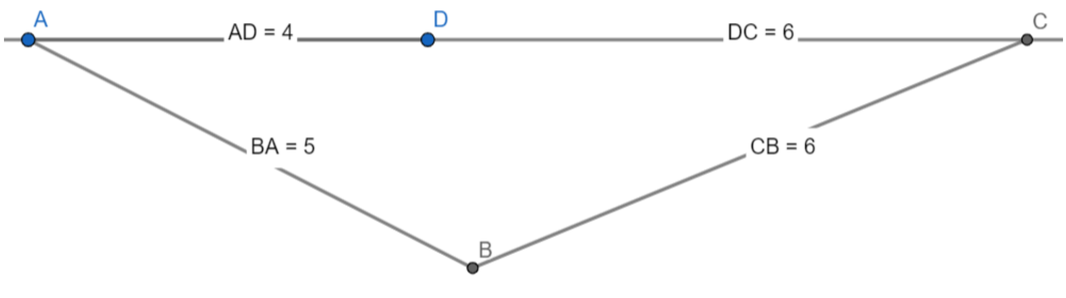
Takže dědiců může být 5, 10, 20, 32, 40, 80 nebo 160)

Úloha 4. *Máme v rovině čtyři stolečky – první, druhý, třetí a čtvrtý. Vzdálenost mezi prvním a druhým je 5 m, mezi druhým a třetím 6 m, mezi třetím a čtvrtým opět 6 m a mezi prvním a čtvrtým je 4 m. Jaká je nejmenší a největší možná vzdálenost mezi prvním a třetím stolečkem?*

Označíme si první stoleček jako bod A, druhý B, třetí C a čtvrtý D. Jelikož bod D je od bodu C vzdálený 6 m, a od bodu A je vzdálený 4 m, nemůže být vzdálenost mezi body A a C menší než $6 - 4 = 2$ m. Zároveň ale nemůže být vzdálenost mezi nimi větší než $6 + 4 = 10$ m. Tyto vzdálenosti to být můžou, vzdálenosti bodu B od bodů A, C nám v ani jednom případě nedělají problémy.

Takže nejmenší možná vzdálenost mezi prvním a třetím stolečkem je 2 m, největší možná je 10 m.

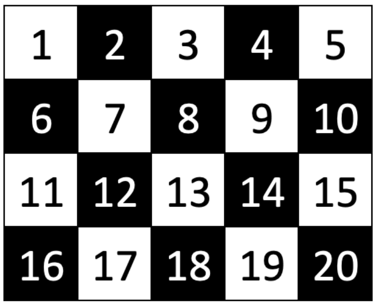




Úloha 5. *Do šachovnice 5×4 jsou po řádcích vepsána přirozená čísla od jedničky (viz obrázek). S tabulkou můžeme provést tyto tahy:*

- *ke všem číslům na šachovnici přičíst nebo odečíst nějaké celé číslo,*
- *číslo na nějakém políčku přepsat na číslo jiného stejně barevného políčka,*
- *všechna políčka jedné barvy vynásobit nějakým celým číslem.*

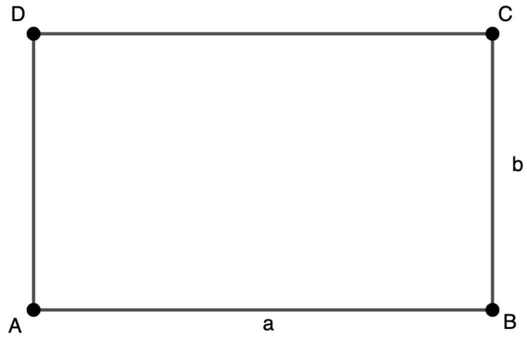
Může dojít k situaci, kdy bude součet všech čísel v tabulce roven jedné?



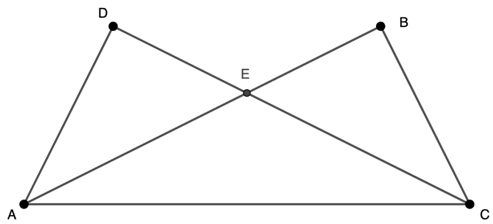
Důležité je si všimnout, že všechna čísla na políčcích jedné barvy mají vždy stejnou paritu, tedy jsou buď všechna lichá, nebo sudá. Ať už provedeme kterýkoli z tahů, tohle se nikdy nezmění – když od nich odečteme stejné číslo, změní to buď paritu všech čísel (pokud bude liché), nebo ani jednoho (když bude sudé), pokud některé číslo přepíšeme na jiné číslo stejné barvy, na daném políčku stále bude číslo s původní paritou, a pokud všechna čísla vynásobíme nějakým celým číslem, opět se může změnit pouze u všech těchto čísel (to když budeme lichá čísla násobit sudým).

Ve všech bílých políčcích, kterých je právě deset, tedy budou čísla stejné parity a ve zbylých deseti černých také. Pokud sečteme deset sudých čísel, určitě nám vyjde číslo sudé, stejně tak pokud sečteme deset lichých čísel. Součet jednotlivých barev tak musí být vždy sudý, a proto i součet všech čísel na šachovnici. Ten se tedy jedné rovnat nemůže.

Úloha 6. *Luca vyndal obdélníkový kus papíru ABCD o délkách stran* $|AB| = a$, $|BC| = b$.



Papír byl přeložen podle jeho úhlopříčky AC tak, že vypadal jako na obrázku.



Určete délku úsečky EB pomocí délek a a b.

$|EB|$ si označíme jako x. $|AE| = |AB| - |EB| = a - x$. Díky symetrii platí, že $|EB| = |DE|$ a $|AE| = |EC|$. Úhel ABC je vnitřní úhel obdélníku a tak je pravý. Nyní můžeme použít Pythagorovu větu v trojúhelníku EBC.

$$\begin{aligned}
|EB|^2 + |BC|^2 &= |EC|^2 \\
x^2 + b^2 &= (a-x)^2 \\
x^2 + b^2 &= a^2 - 2ax + x^2 \\
2ax &= a^2 - b^2 \\
x &= (a^2 - b^2)/2a
\end{aligned}$$

Úloha 7. *Kolik nejvíce jezdců jsme schopni umístit na klasickou šachovnici* 8×8 *tak, aby se vzájemně neohrožovali? Dokažte, tzn. ukažte, že vámi zvolený počet lze umístit, a zároveň ukažte, proč nemůžeme (i při jiném rozmístění) na šachovnici umístit více jezdců – zkuste si šachovnici nějak vhodně rozdělit.*

32. Stojí-li jezdec na bílém poli, ohrožuje pouze černá pole. Stojí-li na černém poli ohrožuje pouze bílá pole. Je tedy zřejmé, že pokud jezdce postavíme jen na jednu barvu, třeba všechny na bílá pole, nebudou se navzájem ohrožovat.

Proč ale není řešením 33 nebo víc?

Podívejme se jenom na výřez šachovnice 4x4 a ten si dále ještě rozdělme do 8 dvojic černých a bílých polí, na kterých se jezdci budou vzájemně ohrožovat:

1	2	4	3
8	7	1	2
6	5	3	4
7	8	6	5

Na každou z dvojic polí označených stejným číslem můžeme dát nejvýše jednoho jezdce. A protože jsme schopni rozdělit celou šachovnici na 32 disjunktních dvojic (nemají společný průnik), můžeme dát na šachovnici nejvíce 32 jezdců. Důkaz je tímto hotov.