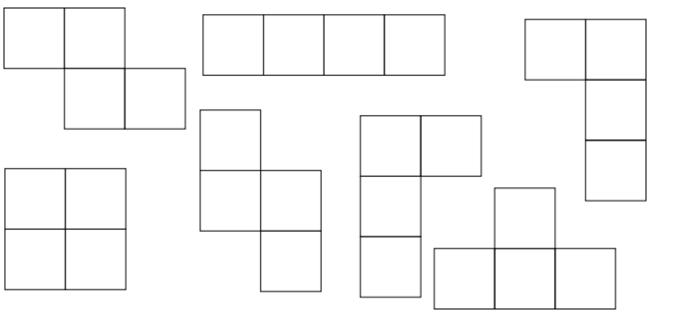
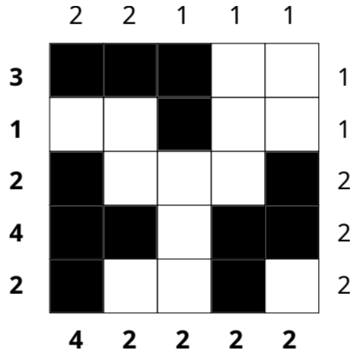
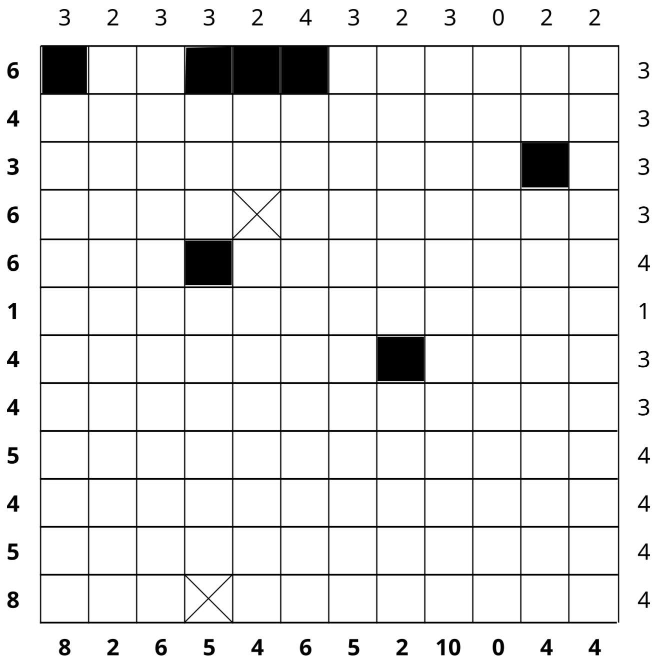
Řešení šesté série

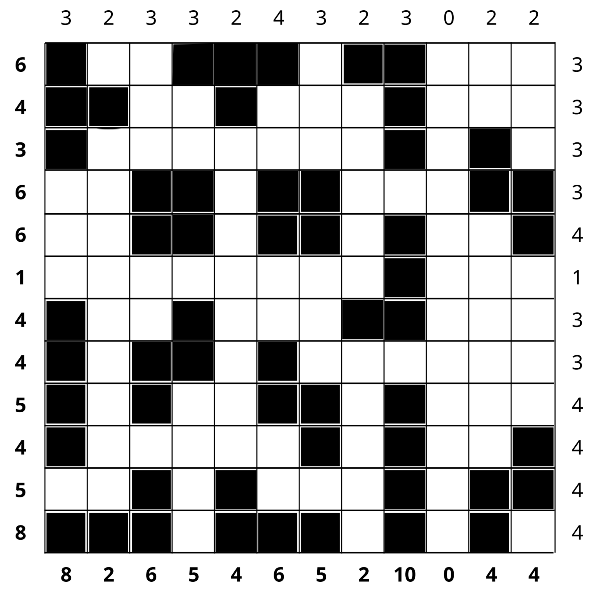
Úloha 1. *Do tabulky 12×12 doplňte 7 základních tetromin (viz obrázek), každé dvakrát. Tetromina se nesmí vzájemně dotýkat, ani rohem. Vybarvená pole znázorňují některá z polí, na kterých tetromina leží. Na přeškrtnutých polích se naopak žádná nenachází. Tučně zvýrazněná čísla reprezentují počet jednotlivých polí v daném řádku či sloupci, na kterých se nachází část tetromina. Ostatní čísla určují, kolik různých tetromin zasahuje do daného řádku či sloupce. V tabulce 5×5 je ukázán příklad správného vyplnění.*







Možných řešení je více, jedním z nich je napříhlad tohle:



Úloha 2. *Najděte všechny uspořádané dvojice (a,b) nezáporných celých čísel, které vyhovují rovnici*

$$a + 2b + ab = 2$$

Pokusme se vyjádřit si b:

$$\begin{aligned} a + 2b + ab &= 2 \\ (2+a) \cdot b &= 2 - a \\ b &= \frac{(2-a)}{(2+a)} (a \neq -2) \end{aligned}$$

Nyní vyšetřeme znaménko výrazu vpravo v závislosti na znaménku a.
Podíl dvou čísel o stejném znaménku je kladný, zatímco podíl dvou čísel o různých znaménkách je záporný. Výraz bude nulový právě tehdy, když bude nulový čitatel, tedy $a = 2$.
Chceme tedy

$$2 - a > 0 \Leftrightarrow a < 2$$

a zároveň

$$2 + a > 0 \Leftrightarrow a > -2$$

z toho plyne

$$a \in \{0, 1\}.$$

Dále můžeme mít

$$2 - a < 0 \Leftrightarrow a > 2$$

a zároveň

$$2 + a < 0 \Leftrightarrow a < -2$$

tyto dvě podmínky ale nemohou platit zároveň, proto dostáváme SPOR

Zbývá získat hodnoty b pro a z množiny $\{0, 1, 2\}$, dostáváme uspořádané dvojice $(a, b) : (0, 1), (1, \frac{1}{3}), (2, 0)$.
Z toho jasně vidíme, že řešení jsou právě 2, a to

$$K = \{(0, 1), (2, 0)\}.$$

Úloha 3. *Tabulka $n \times n$, kde n je liché, je vyplněna nulami a jedničkami tak, že se žádná dvě políčka se stejnými čísly navzájem nedotýkají stranami a v horním levém rohu je umístěna jednička. Na konci každého řádku a každého sloupce je napsán součet všech čísel daného řádku nebo sloupce. Jaký je (v závislosti na n) součet těchto součtů?*

Tabulka má n^2 políček, ve kterých se střídají nuly a jedničky. Protože číslo n je liché, je v prvním řádku (který začíná jedničkou) o jednu jedničku více než nul, v druhém řádku je zase o nulu víc. V celé tabulce, která má lichý počet řádků, je tedy o jednu jedničku více než nul, jedniček je proto

$$\frac{(n^2+1)}{2},$$

což je i součet všech čísel tabulky.
Každé číslo v tabulce leží právě v jednom řádku a právě v jednom sloupci. V součtu součtů je proto každé číslo započítáno právě dvakrát, tudíž součet součtů je roven dvojnásobku součtu všech čísel v tabulce, to je

$$\frac{(n^2+1)}{2} \cdot 2 = n^2 + 1.$$

Úloha 4. *Robot, Héfaistos, a Daidalos soutěží o to, kdo první vydělá 10 000 drachem. Vydělávat mohou dvěma způsoby:*

1. *(za jednotku času) získají 500 drachem*
2. *(za stejnou jednotku času) vynásobí celý svůj obnos 1,2*

Robot začíná se 4000 a používá pouze 1. způsob, Héfaistos začíná s 1800 a používá pouze 2. způsob. Daidalos začíná pouze s 1000, ale neštítí se používat 1. ani 2. způsob. Jak má postupovat, aby vydělával co nejrychleji? Může vyhrát?

Nejprve najděme optimální strategii. Porovnáme proto $1,2 \cdot x$ a $x + 500$ (např. položením $1,2 \cdot x > x + 500$) a zjistíme, že 1. způsob se vyplatí více, pokud máme více než 2500 a 2. způsob je lepší, pokud máme méně než 2500 (při 2500 jsou oba způsoby stejně výdělečné).
Daidalos by tedy měl používat 1. způsob, dokud má méně než 2500, a poté přejít na 2. způsob. Vytvoříme si tabulku na výdělky jednotlivých hráčů po jednotkách času:

jednotka času	robot	Héfaistos	Daidalos
0.	4000	1800	1000
1.	4500	2160	1500
2.	5000	2592	2000
3.	5500	3110	2500
4.	6000	3732	3000
5.	6500	4478	3600
6.	7000	5374	4320
7.	7500	6449	5184
8.	8000	7739	6220
8.	8500	9287	7464
10.	9000	11145	8957
11.	9500	-	10749
12.	10000	-	-

Jak je vidět, vyhrát nemůže, ale pořád může být druhý.

Úloha 5. *Robot měl celkem deset mincí, kde nejmenší měla hodnotu 1, každá další pak dvakrát větší než předchozí (1, 2, 4, 8,...). Jakou nejmenší částku nemůže zaplatit tak, že použije každou minci maximálně jednou? Tzn. bude od některé potřebovat alespoň 2 kusy.*

Hodnoty mincí jsou mocniny dvojky – 1 je 2^0, 2 je 2^1, atd. Jakékoliv číslo jde poskládat jako součet právě mocnin čísla 2 – díky tomu, že každé následující číslo je dvakrát větší než předchozí, jde s předcházejících čísel poskládat vždy číslo o 1 menší než další člen posloupnosti (sečteme polovinu daného čísla, polovinu poloviny a tak dále, až se dostaneme k 1, která tvoří polovinu poslední poloviny, a tedy celé číslo je právě o tu jedničku menší než odpovídající číslo v naší posloupnosti). Robot má k dispozici celkem deset mincí, kde nejmenší je nultá mocnina dvojky, největší pak tedy bude devátou mocninou. Pomocí prvních deseti mocnin (včetně nulté) tedy může poskládat číslo právě o jedna menší, než je hodnota dalšího čísla v posloupnosti, tedy 2^{10}. Nejmenší číslo, které složit nemůže, je tedy právě $2^{10} = 1024$.
Stejného principu využívá i tzv. dvojková soustava. Díky tomu, že dokážeme jakékoliv číslo poskládat jako součet mocnin dvojky, lze ho zapsat pouze pomocí jedniček a nul. Například naše $2^{10} = 1024$ bychom zapsali jako 10 000 000 000. Jednička na začátku znamená, že číslo 2^{10} je v součtu obsaženo jednou, a zbylé nuly pak značí, že ostatní mocniny dvojky v čísle obsaženy nejsou. Třeba číslo 14 by se zapsalo jako $1110 - 1 \times 8 + 1 \times 4 + 1 \times 2 + 0 \times 1$. Na tomto principu pak fungují například počítače.

Úloha 6. *Mějme výraz:*

$$\sqrt{4 \cdot 1 + 4 \cdot 2 + 4 \cdot 3 + \ldots + 4n} = x$$

Určete všechna přirozená čísla n, pro které je x též přirozené číslo. Nápověda: Jaká posloupnost je pod odmocninou a jak se počítá součet jejích prvních n členů?

Aby bylo x přirozené číslo, musí platit, že výraz pod odmocninou je kvadrát. (Také nesmí být menší než nula, to se nám ale zde ani nepodaří.)
Výraz pod odmocninou je aritmetická posloupnost vynásobená čtyřmi. Součet prvních n členů tedy bude

$$S_n = 4 \cdot \frac{n \cdot (n+1)}{2},$$

což musí být kvadrát. (Vzoreček pro výpočet prvních n členů aritmetické posloupnosti můžeme najít třeba na wikipedii, dá se i jednoduše dokázat pomocí mat. indukce). Číslo 4 je samo o sobě kvadrátem, potřebujeme proto, aby i

$$\frac{n \cdot (n+1)}{2}$$

(označme N_k) bylo kvadrát.
Hledané číslo N_k proto musí být číslem trojúhelníkovým – taková čísla značí součet členů aritmetické posloupnosti. A také čtvercové, což znamená, že je kvadrátem. Pomocí Pellovy rovnice (`https://en.m.wikipedia.org/wiki/Square_triangular_number`) získáme předpis pro taková čísla, která jsou zároveň čtvercová i trojúhelníková:

$$N_k = \left(\frac{(3+2\sqrt{2})^k - (3-2\sqrt{2})^k}{4\sqrt{2}} \right)^2.$$

Příkladem prvních čtyř takových čísel N_k je: 1, 36, 1225, 41 616, z čehož pak jednoduše dopočítáme, že n je 1, 8, 49, 288, atd.

Úloha 7. *Nalezněte všechna čísla, která mají právě 8 různých sudých dělitelů a zároveň právě 8 (ne nutně různých) prvočísel v rozkladu na součin prvočísel.*

Aby mělo nějaké číslo (nazvěme ho R) sudé dělitele, musí být samo určitě sudé, tedy ve svém rozkladu na součin prvočísel musí mít alespoň jednu dvojku. Obecně si tedy tvar těchto čísel můžeme zapsat jako:

$$R = 2^n \cdot L_s,$$

kde L_s je součin všech lichých prvočísel v rozkladu, tedy také liché číslo.
Nyní pojďme zjistit, pro která n a jednotlivá lichá prvočísla bude mít R právě 8 sudých dělitelů. V rozkladu každého takového dělitele musí být alespoň jedna dvojka, abychom tedy dostali počet takových dělitelů, musíme mezi sebou vynásobit číslo n a počet různých kombinací s opakováním, který lze vytvořit výběrem ze všech lichých čísel (můžeme vybrat i 0 lichých čísel). Ten si nazvěme K. Obě tato čísla jsou ale evidentně celá, vyplývá z toho tedy, že číslo n může nabývat hodnoty 1, 2, 4, 8. Pouze těchto hodnot může také nabývat K. Pokud by se v rozkladu vyskytovala 3 různá lichá prvočísla, K bude mít hodnotu 8 (viz rozepsáno níže). Tím pádem víme, že více jak 3 různá lichá prvočísla v rozkladu nebudou.
V této chvíli již stačí jen prozkoumat možnosti pro nula až tři různá lichá prvočísla v rozkladu:

i) máme právě 0 lichých prvočísel
$K = 1 => n = \frac{8}{1} = 8$
- $2^8 \to 2, 2^2, 2^3, 2^4, 2^5, 2^6, 2^7, 2^8$

ii) máme právě 1 liché prvočíslo v nějaké mocnině
pokud toto liché číslo v součinu použijeme i-krát, bude $K = i + 1$, tedy řešení bude platné pouze, když $(i + 1)|8$, tedy $i \in \{1, 3, 7\}$
- $2^4 \cdot l_1 \to 2, 2^2, 2^3, 2^4, 2 \cdot l_1, 2^2 \cdot l_1, 2^3 \cdot l_1, 2^4 \cdot l_1$
- $2^2 \cdot {l_1}^3 \to 2, 2^2, 2 \cdot l_1, 2^2 \cdot l_1, 2 \cdot {l_1}^2, 2^2 \cdot {l_1}^2, 2 \cdot {l_1}^3, 2^2 \cdot {l_1}^3$
- $2 \cdot {l_1}^7 \to 2, 2 \cdot l_1, 2 \cdot {l_1}^2, 2 \cdot {l_1}^3, 2 \cdot {l_1}^4, 2 \cdot {l_1}^5, 2 \cdot {l_1}^6, 2 \cdot {l_1}^7$

iii) máme právě 2 různá lichá prvočísla v nějakých mocninách
pokud je alespoň jedno liché prvočíslo v alespoň čtvrté mocnině, pak bude $K > 8$, stačí tedy zkoumat ostatní
pro ${l_1}^3 \cdot {l_2}^3, {l_1}^3 \cdot {l_2}^2, {l_1}^3 \cdot l_2$ a ${l_1}^2 \cdot {l_2}^2$ je také $K > 8$
$l_1 \cdot l_2 \Rightarrow K = 4 \Rightarrow n = \frac{8}{4} = 2$
${l_1}^2 \cdot l_2 \Rightarrow K = 7 \Rightarrow n = \frac{8}{7} \Rightarrow$ SPOR
${l_1}^3 \cdot l_2 \Rightarrow K = 8 \Rightarrow n = \frac{8}{8} = 1$

- $2^2 \cdot l_1 \cdot l_2 \Rightarrow 2, 2^2, 2 \cdot l_1, 2^2 \cdot l_1, 2 \cdot l_2, 2^2 \cdot l_2, 2 \cdot l_1 \cdot l_2, 2^2 \cdot l_1 \cdot l_2$
- $2 \cdot {l_1}^3 \cdot l_2 \Rightarrow 2, 2 \cdot l_1, 2 \cdot {l_1}^2, 2 \cdot {l_1}^3, 2 \cdot l_2, 2 \cdot l_1 \cdot l_2, 2 \cdot {l_1}^2 \cdot l_2, 2 \cdot {l_1}^3 \cdot l_2$

iv) máme právě 3 různá lichá prvočísla v nějakých mocninách máme pouze jednu možnost – použít všechna tři různá lichá prvočísla pouze v první mocnině, tedy $K = 8$
- $2 \cdot l_1 \cdot l_2 \cdot l_3 \Rightarrow 2, 2 \cdot l_1, 2 \cdot l_2, 2 \cdot l_3, 2 \cdot l_1 \cdot l_2, 2 \cdot l_1 \cdot l_3, 2 \cdot l_2 \cdot l_3, 2 \cdot l_1 \cdot l_2 \cdot l_3$

Z rozpisu všech možných tvarů čísla R nám jednoznačně vyplývá, že pouze 2^8 a $2 \cdot L^7$ splňují podmínky pro počet prvočísel v rozkladu. Pro zjednodušení můžeme 2^8 převést do tvaru $2 \cdot 2^7$ a uvést jako řešení tvar $2 \cdot p^7$, kde p je libovolné prvočíslo.
Řešením úlohy jsou všechna čísla ve tvaru $2 \cdot p^7$