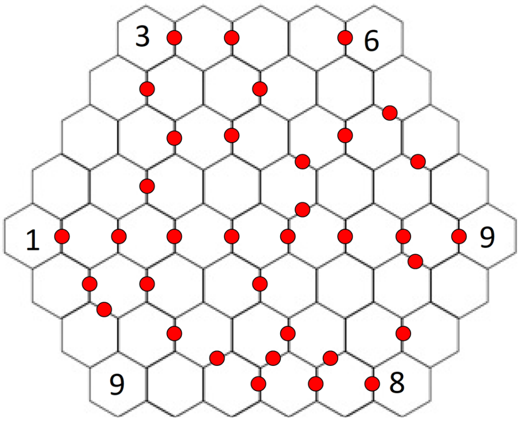
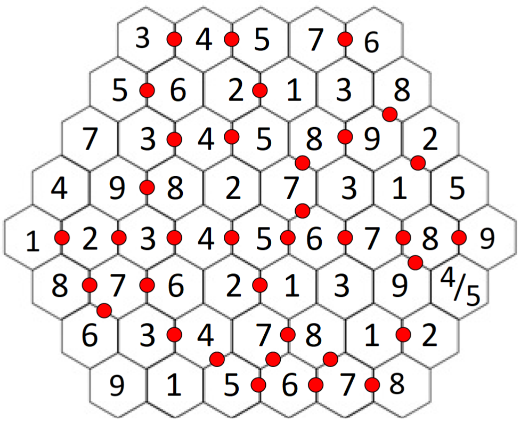
Řešení páté série

Úloha 1. *Doplňte do útvaru čísla 1-9 tak, aby se žádné nevyskytovalo vícekrát v jedné řadě či diagonále. Kroužky u některých hran značí, že se v polích vyskytují dvě po sobě jdoucí čísla. Všechny tyto dvojice jsou vyznačeny. Určete počet možných řešení.*



Řešení je pouze jedno a to následující:



Úloha 2. *Zadrženi byli čtyři podezřelí – Bonnie Parkerová, James Moriarty, Jack Rozparovač, Hannibal Lecter. Každý z nich řekl právě jednu pravdivou a právě jednu nepravdivou větu. Víme, že mezi těmito čtyřmi lidmi jsou právě dva disjunktní přátelské páry (jejich průnikem je prázdná množina, jsou navzájem různé), přičemž hledaní dva pachatelé jsou přátelé. Kdo jsou pachatelé?*

- *Bonnie Parkerová: „Pachatelem je James Moriarty. Pachatelem je Jack Rozparovač.“*
- *James Moriarty: „Jsem nevinný. Kamarádím se s Hannibalem Lecterem.“*
- *Jack Rozparovač: „Jsem vinen. Přátelím se s Bonnie Parkerovou.“*
- *Hannibal Lecter: „James Moriarty je nevinen. Nekamarádím s Bonnie Parkerovou.“*

Jsou možné tři dvojice párů Bonnie+James a Jack+Hannibal, pak Bonnie+Jack a James+Hannibal, pak Bonnie+Hannibal a James+Jack. Výpovědí Bonnie je jasné, že pachatelem je buď James, nebo Jack, ale ne zároveň. Můžeme tedy vyřadit třetí variantu.

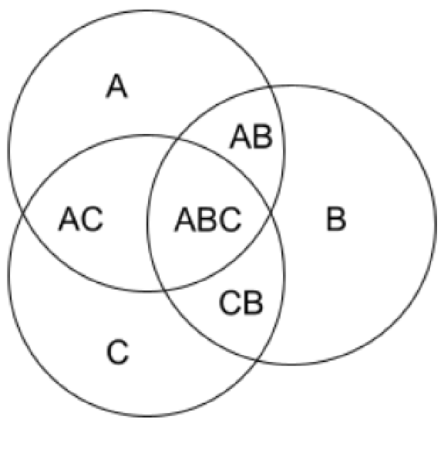
Začněme s první variantou. Pokud by platilo Bonnie+James a Jack+Hannibal, pak druhá věta Jamese je lež, a tedy první je pravda, to by znamenalo, že James je nevinný a pachateli jsou Jack a Hannibal. Pak se ale podívejme na výpověď Hannibala. Jeho první věta je pravdivá. To znamená, že druhá musí být lživá, tedy se přátelí s Bonnie, což je ale spor. Tato dvojice párů to být nemůže.

Zbývá už jen jedna, a to druhá varianta. Druhá věta Jamese musí být pravdivá, tedy jeho první věta je lživá, to znamená, že James je vinen a s ním i Hannibal. Zkontrolujeme s výpověďmi ostatních podezřelých a zjistíme, že je to správná varianta. Pachateli jsou James a Hannibal. A: Pachatelem je James. Pachatelem je Jack. B: Jsem nevinný. Přátelím s Hannibalem. C: Jsem vinen. Přátelím se s Bonnie. D: James je nevinen. Nekamarádím se s Bonnie.

Úloha 3. *Každý z pokojů na patře má alespoň jednu ze tří propriet – balkón, vanu nebo klimatizaci. Ke každé z možných kombinací propriet přiřaďte explicitně počet pokojů, které danou kombinaci nesou, jestliže máte k dispozici následující kritéria. Pokud počet nelze jednoznačně určit, vysvětlete proč.*

- *Všech pokojů na patře je dohromady 137;*
- *pokojů, co mají vždy balkón, ale klimatizaci mají pouze tehdy, když mají i vanu, je 93;*
- *pokojů s vanou i klimatizací zároveň je 44;*
- *počet všech pokojů, co nemají zároveň balkón i vanu, je 77;*
- *pokojů vždy s klimatizací a nikdy s balkónem je 25;*
- *pokojů se samotným balkónem a pokojů se samotnou klimatizací je 56.*

Pro přehlednost si nakreslíme následující diagram a budeme počítat s neznámými A - počet pokojů pouze s balkónem, B - počet pokojů pouze s vanou, C - počet pokojů pouze s klimatizací, AB - pokoje pouze s balkónem a vanou, AC - pokoje pouze s balkónem a klimatizací, BC - pokoje pouze s vanou a klimatizací a ABC - pokoje se vším.



Nyní si můžeme kritéria přepsat do soustavy rovnic:

$$\begin{aligned} A+B+C+AB+AC+BC+ABC &= 137 \\ A+ABC+AB &= 93 \\ ABC+BC &= 44 \\ A+B+AC+C+CB &= 77 \\ C+CB &= 25 \\ A+C &= 56 \end{aligned}$$

Jelikož máme 6 rovnic o 7 neznámých, nemůžeme začít rovnice počítat jako klasickou soustavu. Místo toho zkoušíme od sebe navzájem odečítat a přičítat jednotlivé rovnice tak, aby nám vypadla jen jedna hodnota. Například když od 4. rovnice odečteme 6., získáme kratší rovnici $B+AC+CB=21$. Pak si můžeme všimnout, že tato nová rovnice dává s 2. rovnicí dohromady celek bez C, máme tedy vyhráno, rovnice spolu sečteme a odečteme od 1. rovnice a dostaneme, že $C=23$. V tuto chvíli je práce snadná, budeme objevovat nové a nové rovnice, kam můžeme nalezené hodnoty dosadit a získat tak nové:

Z dvou posledních rovnic dostaneme, že $A=33$ a $CB=2$. Ze třetí rovnice pak máme $ABC=42$ a tedy z druhé rovnice $AB=18$.

Nyní se ale dostaneme do problému, protože nám chybí neznámé B a AC a nemáme rovnici, kde by vystupovaly samostatně. Z jediných dvou rovnic, kde se nachází, dostaneme pouze $B+AC=19$. U těchto dvou tedy nemůžeme přesně říct, kolik předmětů má vlastnost B a AC, můžeme pouze říct, kolik je součet takových dvou skupin.

Úloha 4. *Máme tři přihrádky: v první jsou 2 zlaté klíče a 6 stříbrných, v druhé je 5 zlatých a 5 stříbrných klíčů a ve třetí 9 zlatých a 4 stříbrné klíče. Z kterých přihrádek a nejméně kolikrát musíme brát, abychom měli jistotu, že vezmeme alespoň 6 zlatých klíčů a 5 stříbrných klíčů?*

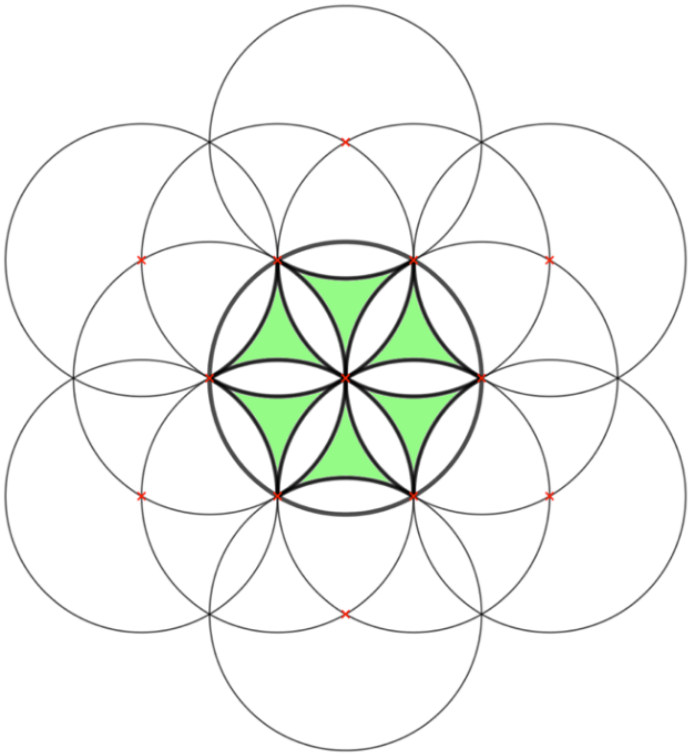
V první části řešení ukážeme, že zadání lze splnit vytáhnutím 15 klíčů - například vytáhneme 10 klíčů ze druhé přihrádky a 5 ze třetí. V druhé části řešení je třeba ukázat, že méně tahy zadání splnit nelze. Rozdělíme řešení podle počtu přihrádek, ze kterých bereme klíče.

Řešení braním z pouze jedné přihrádky neexistuje, jediná přihrádka s 11 nebo více klíči je ta třetí, která ale neobsahuje 5 či více stříbrných klíčů.

Řešení braním ze dvou přihrádek se dělí podle toho, z kterých. Zkoušíme vyřešit úlohu na 14 tahů pro každou dvojici přihrádek. Abychom při braní z jedné přihrádky s jistotou věděli alespoň o jednom klíči, zda je zlatý či stříbrný, musíme z přihrádky brát vícekrát, než je klíčů druhu, kterého je méně, například z první přihrádky musíme brát alespoň třikrát. Také víme, že musíme získat informace z obou přihrádek, protože pomocí informací z jediné přihrádky úlohu vyřešit nelze. Takto získáme pro každou dvojici přihrádek 5-6 možností, jak z nich 14x táhnout. Ani jedna možnost však nesplňuje zadání.

Zbývá prošetřit poslední případ, kdy bereme ze všech tří přihrádek. Musíme z každé získat informaci o alespoň jednom klíči, který z ní vytáhneme. Zároveň chceme ze 14 vytažených klíčů o 11 s určitostí vědět, zda jsou zlaté či stříbrné. To znamená, že nejvýše tři klíče budou "neznámé". Toto pak určitě platí i pro každou přihrádku - nejvýše tři z klíčů vytažených z každé přihrádky mohou být neznámé. Z každé přihrádky musíme vytáhnout alespoň takový počet klíčů, který splňuje obě pravidla, což je u první 3, u druhé 7 a u třetí 10. Celkem tedy potřebujeme minimálně 20 tahů, což nevyhovuje našim požadavkům. Tím je rozbor všech možností ukončen.

Úloha 5. *Jaký je obsah zeleně vybarvených ploch, pokud poloměr všech kruhů na obrázku je r? Nápověda: Podívejte se, jak se počítá obsah šestiúhelníka.*



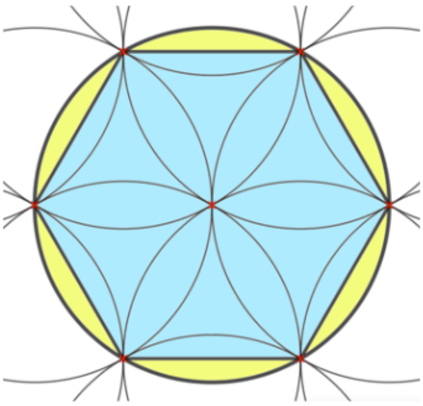
Obsah S zeleně vybarvené části zjistíme nejsnáze jako obsah kruhu minus obsah 12 „lístečků“. Obsah kruhu je $S_K = \pi r^2$. Dále umíme určit obsah šesti pololístečků neboli tří lístečků (na obrázku níže žlutě) tak, že od obsahu kruhu odečteme obsah šestiúhelníku vepsaného do trojúhelníku (modře). Obsah šestiúhelníku bude $S_H = \frac{3\sqrt{3}}{2}r^2$, protože jeho strana je stejně dlouhá jako poloměr kružnic. Potom:

$$3S_L = S_K - S_H = \pi r^2 - \frac{3\sqrt{3}}{2}r^2 = (\pi - \frac{3\sqrt{3}}{2})r^2$$

$$S_L = (\frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2})r^2$$

A nakonec:

$$S = S_K - 12 \cdot S_L = \pi r^2 - 12 \cdot (\frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2})r^2 = (\pi - 4\pi + 6\sqrt{3})r^2 = 3r^2(2\sqrt{3} - \pi)$$



Úloha 6. *Na čtyřech dlaždičkách jsou čtyři po dvou různá čísla od 0 do 9. Dlaždičky poskládáme za sebe tak, že vzniklé číslo je dělitelné šesti. Dlaždičku úplně zleva přesuneme úplně doprava, vzniklé číslo je pak dělitelné jedenácti. Znovu dlaždičku úplně zleva přesuneme úplně doprava, vznikne číslo dělitelné pěti. Jaký je největší možný součet čísel na dlaždičkách?*

Čísla na kartičkách označíme a, b, c, d. Potom první poskládané číslo ve tvaru $abcd$ musí být dělitelné šesti, proto $a + b + c + d$ musí být dělitelné třemi a d bude sudé.
Přehozením kartiček dostaneme číslo ve tvaru $bcda$. Aby bylo číslo dělitelné 11, musí být rozdíl součtu cifer na sudých pozicích a součtu cifer na lichých pozicích násobkem jedenácti. V našem případě může nastat, že tento rozdíl bude 0, nebo 11 (vzhledem k tomu, že sčítáme jednociferná čísla, rozdíly 22 a větší nastat nemohou). Takže buď $a + c = b + d$, nebo $a + c + 11 = b + d$, nebo $a + c = b + d + 11$.

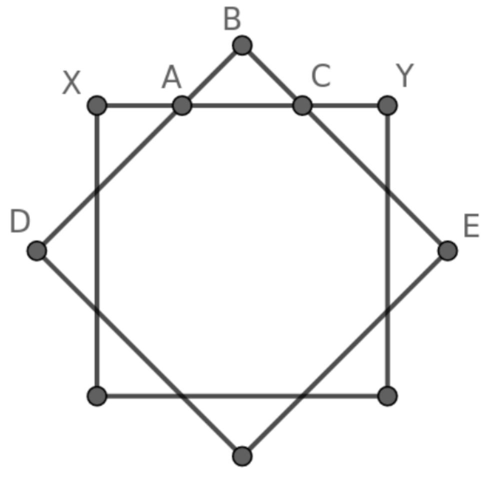
Z třetí podmínky víme, že b je buď 0, nebo 5, protože posledním přehozením kartiček dostaneme číslo tvaru $cdab$, kde b je poslední cifra.

Hledáme největší možný součet $a + b + c + d$ takový, aby byl dělitelný třemi. Pokud by b bylo 5, můžeme dostat vyhovující součet nejvíce 27 (a, c, d volíme největší možná, takže $9+8+7+5 = 29$, nejbližší nižší dělitelné třemi je 27). V tomto případě by nemohlo platit $a + c = b + d$, protože číslo 27 je liché a nemůžeme ho rozdělit na dvě shodné celočíselné části. Může tedy platit $a + c + 11 = b + d$, přičemž víme, že $a + b + c + d$ se rovná 27, součet levé a pravé strany rovnice tedy $27+11$ a každá ze stran rovnice bude $(27+11)/2=19$. Jenže součet b+d nikdy nedá 19, protože b i d jsou jednociferná. Obdobně pro $a + c = b + d + 11$. Součet 27 tedy nemůže nastat.

Zkusíme 24, to je sudé, musí tedy platit $a + c = b + d = 24/2 = 12$. (Přičtením 11 bychom dostali liché číslo, které nerozdělíme na dvě shodné celočíselné části.) Pokud b bude 5, pak d bude $12 - 5 = 7$, což ale není sudé, nebyla by splněna podmínka pro dělitelnost šesti. Pokud $b = 0$, pak $d = 12$, což je příliš velké. Součet musí být menší než 24.

Zkusíme tedy součet 21, to je liché, musí platit $a + c + 11 = b + d$, nebo $a + c = b + d + 11$. Pro $a+c+11 = b+d = (21+11)/2 = 16$ a $b = 5$ dostaneme $d = 16-5 = 11$, moc velké. Když $b = 0, d = 16$, moc velké. Pro $a + c = b + d + 11 = 16$ a $b = 5$ dostaneme, že $a + c = 5 + d + 11 = 16$, takže $d = 0$, což je sudé a vyhovuje zadání. Čísla a a c pak mohou být libovolná splňující, že $a + c = 16$. Největší možný součet je tedy 21.

Úloha 7. *Mějme dva shodné čtverce položené přes sebe tak, že jsou vzájemně pootočeny o 45° a jejich geometrické středy jsou v témže bodě. Spočtěte velikost plochy takto vzniklého obrazce (tedy plochy, pokryté alespoň jedním takovým čtvercem), pokud oba čtverce mají délku strany a.*



Vznikne nám pravidelný nekonvexní šestnáctiúhelník. Označme některé z jeho vrcholů tak, jako na obrázku. Abychom spočítali celý obsah, potřebujeme spočítat obsah malého trojúhelníčku ABC.

Zřejmě platí $|XA| + |AC| + |CY| = x + y + x = a$, tedy $y = a - 2x$ (1) Dále, jelikož trojúhelník ABC je pravoúhlý, z Pythagorovy věty platí $2x^2 = y^2$, tedy $y = \sqrt{2}x$ (2) Dosaďme do (1):

$$\begin{aligned} \sqrt{2}x &= a - 2x \\ (\sqrt{2} + 2)x &= a \\ x &= \frac{a}{(\sqrt{2} + 2)} \end{aligned}$$

Obsah trojúhelníka ABC je tedy $a^2/(2 + 4 + 4\sqrt{2}) \cdot 2 = a^2/4(3 + 2\sqrt{2})$. Celkový obsah tedy bude $a^2 + 4 \cdot a^2/4(3 + 2\sqrt{2}) = a^2 \cdot (1 + (1/(3 + 2\sqrt{2}) = (4 + 2\sqrt{2})/(3 + 2\sqrt{2}) \cdot a^2$