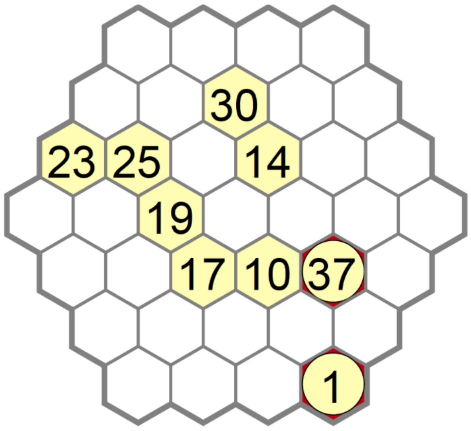
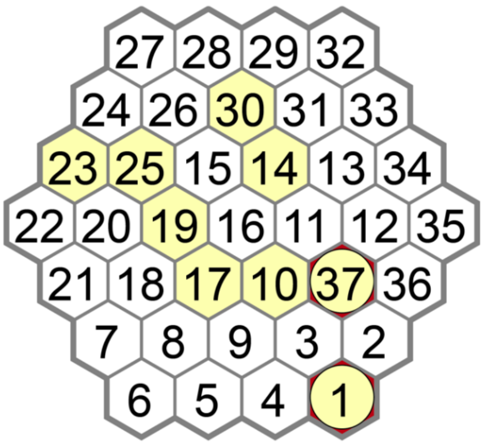
Řešení čtvrté série

Úloha 1. *Doplňte obrázek tak, aby se v něm nacházela všechna čísla od 1 do 37 (žádné se nesmí opakovat) a po sobě jdoucí čísla spolu sousedila stranou. Hádanka je známá jako Hidotu a více jich můžete najít např. na stránce https://www.hidato.com.*



Řešení je pouze jedno a to následující:



Úloha 2. *Najděte nejmenší 11-ciferné přirozené číslo dělitelné 11 s ciferným součtem 11.*

Užijeme pravidlo pro dělitelnost 11 – rozdíl součtu cifer na lichých pozicích a součtu cifer na sudých pozicích musí být dělitelný 11. Tento rozdíl nemůže být 0, protože to je sudé číslo, a tím pádem musí být součty lichých pozic a sudých pozic buď oba liché, nebo oba sudé. K tomu dojít nemůže, protože jejich součet je ciferný součet, což je 11, takže musí být jeden lichý a jeden sudý. Zbývá tedy to, že daný rozdíl bude 11. To znamená, že buď součet lichých pozic bude 11 a součet sudých pozic 0 nebo naopak. Číslo je 11-ciferné, a první cifra musí být nenulová, což je lichá cifra. Tím pádem bude součet lichých pozic 11 a součet sudých pozic 0. Takže na sudých pozicích budou pouze nuly. První cifru chceme co nejmenší, tedy 1. Poslední cifru zase co největší, tedy 9. Do součtu zbývá 1, kterou umístíme co nejblíž ke konci, tedy na 9. pozici. Z toho vychází číslo 10 000 000 109.

Úloha 3. *V pondělí si Fermat s Eulerem vydělali peníze v poměru 2:3 (Fermat:Euler), v úterý v poměru 1:3. Jaký je celkový poměr peněz, kteří si matematici vydělali dohromady za oba dva dny, pokud poměr vydělaných peněz v pondělí a úterý je 5:4?*

Představme si situaci na konkrétním příkladu. Vydělali si celkem 9 mincí, z toho 5 v pondělí. Z těchto pěti mincí budou 2 díly Fermata a 3 díly Eulera - dodržujeme poměr 2:3. V úterý si vydělali 4 mince, z toho 1 pro Fermata a 3 pro Eulera. Celkem si tak získal 3 mince Fermat a 6 mincí Euler, což dává poměr 1:2.

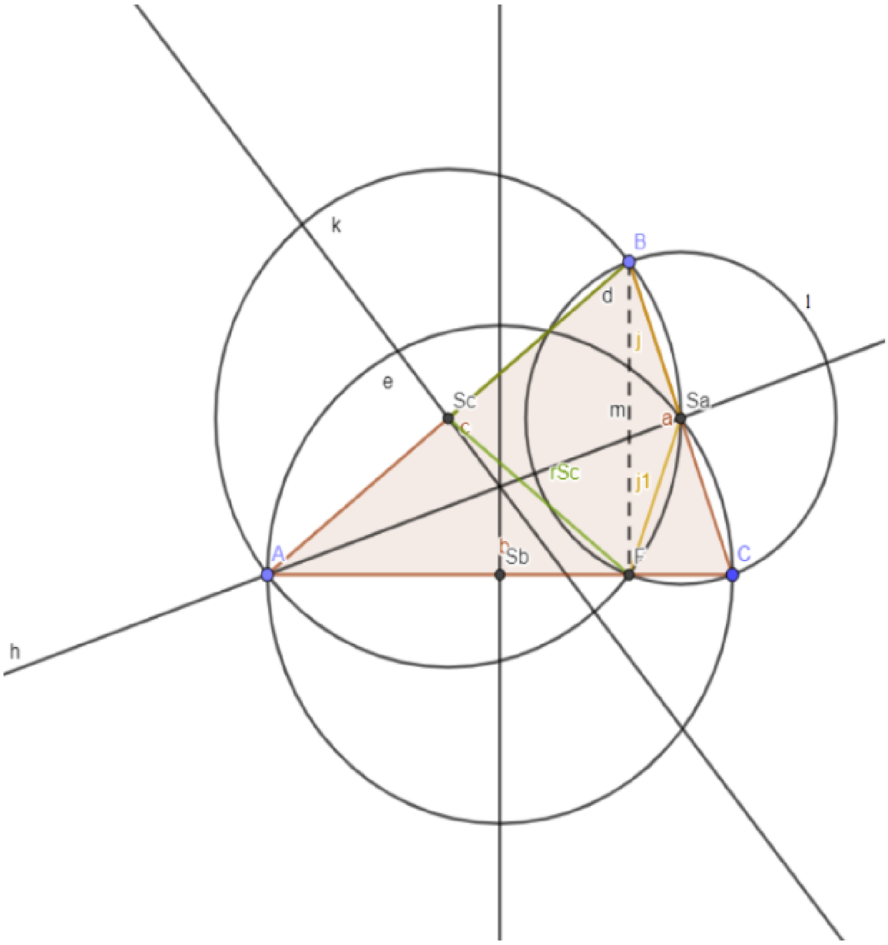
Úloha 4. *Hráč má dvě šestistranné kostky. V každém tahu hodí těmito dvěma kostkami a sečte čísla na nich. Ke každému součtu je přiřazena právě jedna karta A až F, tu si hráč v tahu vezme. Některé součty pak padají častěji než jiné. Přiřaďte ke každému součtu právě jednu z karet A až F (některé karty budou u více čísel) tak, aby hráč měl po 144 hodech nejpravděpodobněji u sebe 8x kartu A, 12x kartu B, 20x kartu C, 28x kartu D, 36x kartu E, 40x kartu F.*
Příklad: Pokud bychom měli dvě kostky pouze s dvěma stěnami s čísly 1 a 2, pak bychom číslo 2 mohli hodit právě jedním způsobem a to, když na obou kostkách bude 1, číslo 3 můžeme hodit dvěma způsoby: na první kostce 1 a na druhé 2 a obráceně (rozlišujeme, která kostka je která), číslo 4 můžeme hodit opět jedním způsobem, a to když na obou kostkách bude 2. Tudíž když k 2 přiřadíme kartu A, k 3 kartu B a k 4 kartu C, pak po 144 hodech budeme mít nejpravděpodobněji 36 karet A, 72 karet B a 36 karet C.

Když se podíváme kolika způsoby můžeme hodit jednotlivá čísla 2-12 pomocí dvou kostek dostame: 2 - 1 způsob, 3 - 2 způsoby, 4 - 3 způsoby, 5 – 4 způsoby, 6 – 5 způsobů, 7 – 6 způsobů, 8 – 5 způsobů, 9 – 4 způsoby, 10 – 3 způsoby, 11 – 2 způsoby, 12 – 1 způsob.

Kdyby v ideálním případě padla 2 pouze jednou, znamenalo by to, že bylo pouze 36 pokusů (1+2+3+4 +5+6+5+4+3+2+1). Kdyby padla 2 čtyřikrát dostaneme požadovaných 144 hodů. Nyní spočítáme kolikrát padla jednotlivá čísla v tomto idealistickém případě a přiřadíme k číslům karty, tak aby to vyšlo. 2 – 4x, 3 – 8x, 4 – 12x, 5 – 16x, 6 - 20x, 7 – 24x, 8 – 20x, 9 – 16x, 10 – 12x, 11 – 8x, 12 – 4x. Například karta A – 3, karta B – 4, karta C – 5, 2, karta D – 9, 11, 12, karta E – 7, 10, karta F – 8, 6.

Úloha 5. *Strana AB trojúhelníku ABC je průměr kružnice k, strana BC je průměr kružnice l. Kružnice k a l se protínají ve dvou bodech, v bodě B a v bodě, který označíme F. Dokažte, že F leží na přímce AC a že je patou výšky ke straně AC. Nápověda: nastudujte si, co je Thaletova kružnice*

Úhel BFA je pravý, protože F leží na Thaletově kružnici k s průměrem AB. Podobně úhel BFC je také pravý, protože leží na Thaletově kružnici l s průměrem BC. Úhel CFA je tedy součet úhlů CFB a BFC, což je 90°+90°=180°, přímý úhel. Body A, F a C tedy leží na jedné přímce. A jelikož je zároveň BF kolmá na AC, je F patou výšky na stranu AC.



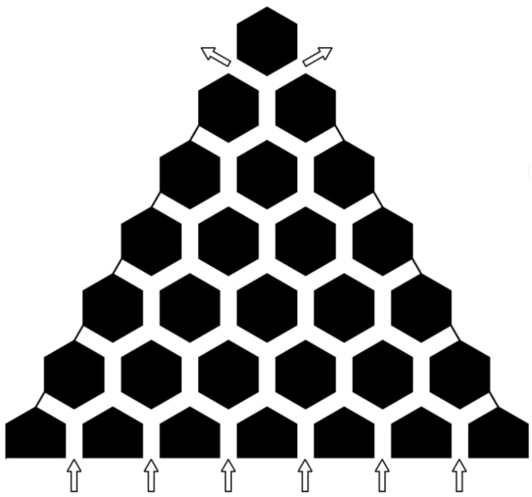
Úloha 6. *Představme si následující nekonečný součin závorek:*

$$(1+qx)(1+(q^2)x)(1+(q^3)x)(1+(q^4)x)\ldots.. = 1+qx+q^2x+q^3x+\ldots$$

Vysvětlete, proč koeficient u $(q^m)\cdot(x^n)$ udává, kolikrát umíme číslo m napsat jako součet n po dvou různých přirozených čísel. Koeficient značí číslo před tímto součinem, například v našem součinu je koeficient u qx roven 1, ale například u čísla $(12q^2)\cdot(x^3)$ je koeficient 12.

Řešení je jednoduché – kdy dostaneme do celkového součtu číslo $q^m x^n$? No právě tehdy, když spolu vynásobíme $q^a x \cdot q^b x \cdot q^c x ... = q^{(a+b+c+\cdots)} x^n$, no a vzhledem k tomu, že x je v n-té mocnině znamená to, že m je rovno součtu n různých čísel. Takže za každý součet n čísel, který dají dohromady m dostaneme v součtu jednou $q^m x^n$, tudíž když se podíváme kolikrát jsme $q^m x^n$ celkově dostali bude přesně tolikrát kolikrát umíme napsat m jako součet n různých čísel.

Úloha 7.



1. *Kolik existuje různých nejkratších cest při možném vstupu do bludiště a výstupu z něj dle šipek na obrázku?*
2. *Kolik by takových cest bylo, kdyby měl útvar ještě dalších 8 řad šestiúhelníků?*

Nápověda: Nastudujte si Pascalův trojúhelník.

Úlohu lze samozřejmě vyřešit vypsáním všech možností, to by ale bylo pracné. My si ale můžeme všimnout, že na každém rozcestí nad vrcholem každého z šestiúhelníku je přesně tolik možností jak se dostat z bludiště, jako je jich v součtu dvou rozcestí, nacházejících se nad ním. Ale toto je přesně princip Pascalova trojúhelníku, na který poukazuje nápověda, s tím rozdílem, že jsou dva konečné výstupy z trojúhelníku, ne pouze jeden, čímž se počet řešení zdvojnásobí.

Nyní nám stačí jen určit, že v místě každého východu je právě jedna možnost jak se z bludiště dostat. Z toho plyne, že nad prostředním šestiúhelníkem třetí řady bude jejich součet, tedy 2 možnosti cesty ven. Obdobně doplníme celý trojúhelník a dostaneme, že možností pro východ ze základního bludiště je 2 * (1 + 5 + 10 + 10 + 5 + 1) = 64.

U druhé části úlohy máme možností o hodně více, ale se znalostí již popsaného principu nám stačí sečíst čísla na 14. řádku Pascalova trojúhelníku.

$$2 * (1 + 13 + 78 + 286 + 715 + 1287 + 1716 + 1716 + 1287 + 715 + 286 + 78 + 13 + 1) = 16384$$

V první variantě existuje celkem 64 různých nejkratších cest a v té druhé 16 384.