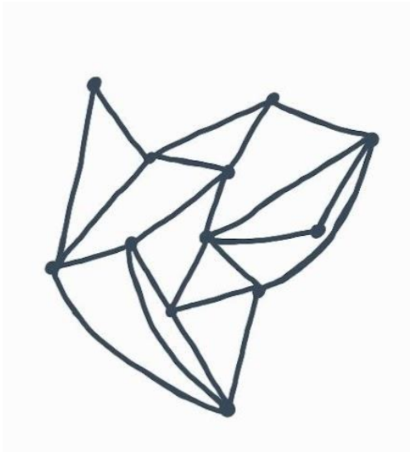
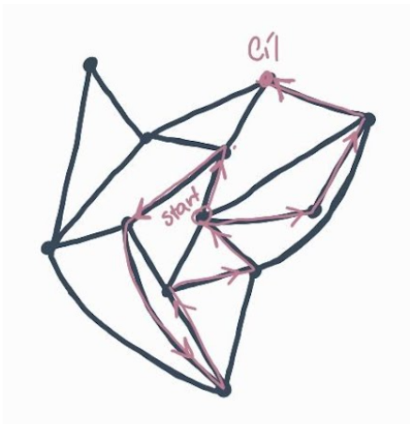
Řešení třetí série

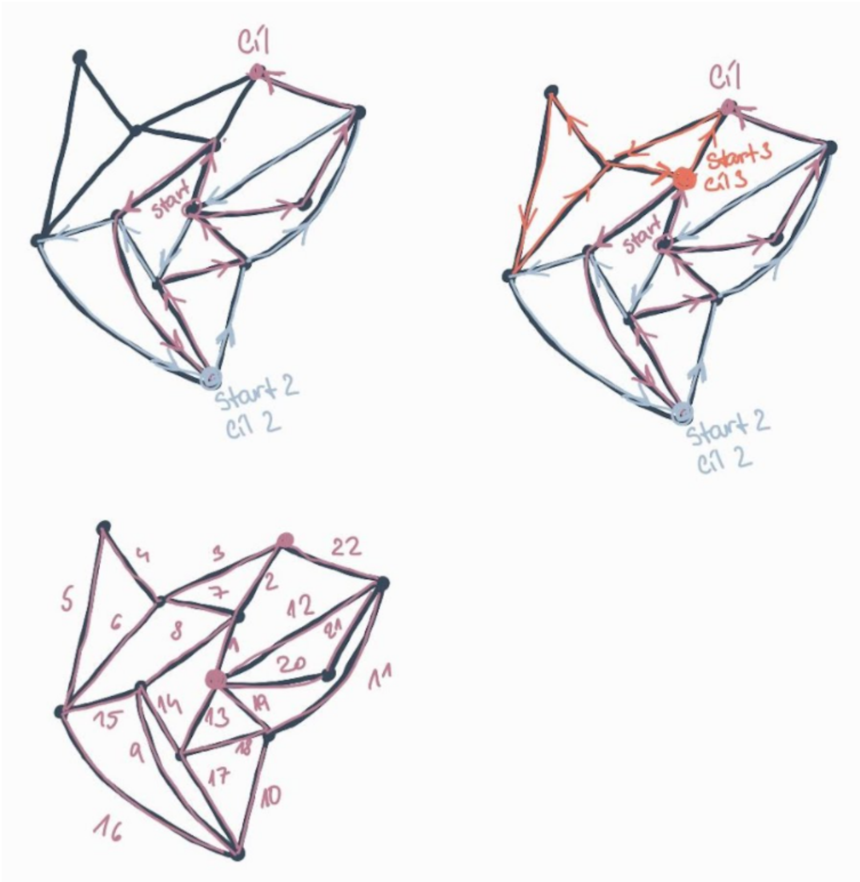
Úloha 1. *Najdi alespoň jeden způsob, jak projít jedním tahem následující graf (tzn. projít po každé hraně právě jednou). Zároveň vysvětli, proč jsi nemohl končit a začínat v jiných bodech. (Nápověda: Nastudujte si eulerovský tah)*



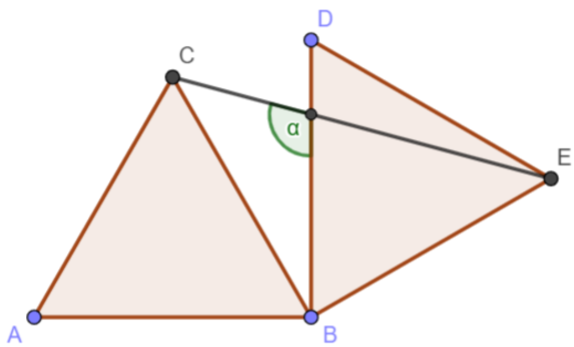
Abychom tento graf mohli projít jedním tahem, musíme najít body, do kterých vede lichý počet čar – ty totiž musí být naším začátkem a koncem, protože jimi nemůžeme procházet – při procházení po jedné čáře přijdeme a po druhé odejdeme – vždy sudý počet čar. Takové vrcholy jsou skutečně v našem grafu dva – jeden bude začátek a druhý konec.



Nyní najděme v grafu jednu cestu z jednoho vrcholu s lichým počtem cest do druhého. Nyní budeme pokračovat tak, že vezmeme nějaký bod na této cestě, který má ještě volné příjezdové cesty, a uděláme cestu z něho zpátky do něho - kruh. A takto budeme pokračovat dále, dokud nezaplníme celý graf. Cestu jedním tahem pak projdeme následovně - půjdeme po naší původní cestě a když narazíme na nějaký bod, z kterého vede kruh, objedeme ten kruh a následně pokračujeme v naší cestě, dokud nenalezneme další takový bod. Tento způsob procházení grafu vymyslel známý matematik Leonard Euler již v roce 1736. Ale samozřejmě se dá úloha vyřešit i za pomoci strategie pokus/omyl.



Úloha 2. *Na obrázku jsou dva shodné rovnostranné trojúhelníky ABC a BED, přičemž úhel ABD je pravý. Jaká je velikost úhlu alfa?*



Za užití faktů, že v trojúhelníku je součet vnitřních úhlů 180°, že rovnostranné trojúhelníky mají vnitřní úhly 60° a že rovnoramenný trojúhelník má při základně shodné úhly, se dopočítáme k velikosti $\alpha = 105°$.

Jelikož úhel ABD je pravý a úhel ABC má 60°, úhel CBD bude mít 30°. Trojúhelník CBE je rovnoramenný, velikost úhlu CBE je $60° + 30° = 90°$, a tak u základny CE budou oba úhly 45°. Pak α bude mít $180° - 45° - 30° = 105°$.

Úloha 3. *Kolik existuje čtyřciferných čísel dělitelných devíti s cifrou 5 na pozici stovek?*

Pravidlo pro dělitelnost devíti říká, že ciferný součet musí být dělitelný devíti. Cifru 5 už máme danou, musíme ji proto odečíst, takže ciferný součet zbývajících tří cifer musí dávat po dělení devíti zbytek 4. Podle pravidla platí, že pokud nějak vyměníme číslice čísla dělitelného devíti, nemá to na dělitelnost vliv. Proto nám bude stačit zjistit, kolik je tříciferných čísel dávajících zbytek po dělení devíti 4. Tato čísla se budou lišit o 9, tj. bude to jedno z devíti po sobě jdoucích. Trojciferných čísel je celkem 900. Stačí tedy vydělit devíti 900÷9=100.

Úloha 4. *V rovnoramenném lichoběžníku $ABCD$ se základnami AB (delší) a CD (kratší) je u vrcholu A úhel alfa a u vrcholu B úhel beta. Středem úsečky AB je bod S a platí, že úhel ASD je taktéž beta a úhel BSC je alfa. V jakém poměru jsou základny lichoběžníku?*

Trojúhelníky ASD a SBC jsou shodné podle věty usu, třetí úhel v těchto trojúhelnících můžeme označit jako γ. Vnitřní úhel trojúhelníku DSC u vrcholu S je rovněž γ, neboť je doplňkem do 180° přímého úhlu. Dále když protáhneme strany AD a BC do polopřímek tak, aby se protly, vznikne nám průsečík X takový, že trojúhelník DCX má vnitřní úhel u vrcholu D roven α (souhlasný úhel s úhlem u vrcholu A) a vnitřní úhel u vrcholu C roven β (opět souhlasný úhel s úhlem u vrcholu B). Tím tedy ale v trojúhelníku SDC dostáváme hodnoty zbylých dvou vnitřních úhlů, neboť jde opět o doplňky do 180°, tím pádem u vrcholu D je to β a u vrcholu C α. Tím dostáváme, že i tento trojúhelník je shodný s prvními dvěma trojúhelníky opět podle věty usu. A tedy délka úsečky DC = délka úsečky AS = délka úsečky SB. Čímž dostáváme, že poměr základen AB:CD = 2:1.

Úloha 5. *Krótón a Feidippidés závodí na okruhu 220 m. Oba běží konstantní rychlostí, Feidippidés běží o 1 m/s rychleji než Krótón. Feidippidés ale tentokrát vystartoval o 10 sekund později než Krótón. Kdyby Feidippidés běžel opačným směrem než Krótón, potkali by se o 20 sekund dříve, než kdyby Feidippidés dobíhal Krótóna stejným směrem. Jakými rychlostmi oba běželi? (Nápověda: Porovnejte dráhy Krótóna a Feidippida v jednotlivých případech. Z jakého vzorce je možné je vyjádřit? Zvládnete rozložit kvadratický trojčlen?)*

Nechť v je rychlost Krotona a t je čas, za který se potkali, když Feidippidés dojížděl.

$$
\begin{aligned}
s_1 &= s_2 \\
v \cdot t &= (v+1) \cdot (t-10) \\
vt &= vt - 10v + t - 10 \\
t &= 10v + 10 \\
s_1 &= 220 - s_2 \\
v \cdot (t-20) &= 220 - (v+1) \cdot (t - 20 - 10) \\
v \cdot (10v - 10) &= 220 - (v+1) \cdot (10v - 20) \\
10v^2 - 10v &= 220 - 10v^2 + 20v - 10v + 20 \\
20v^2 - 20v - 240 &= 0 \\
v^2 - v - 12 &= 0 \\
(v-4)(v+3) &= 0
\end{aligned}
$$

Jako řešení dostáváme v z množiny $\{-3, 4\}$, ale jelikož jsme na začátku uvažovali pouze kladné rychlosti, platí jen $v = 4$. Krótón tedy jede 4 m/s a Feidipiddés 5 m/s.

Úloha 6. *Kolik různých rovin je určeno 2021 po dvou různými body v prostoru, z nichž žádné 4 neleží v téže rovině? (Nápověda: Kolika různými body je určena jedna rovina? Záleží nám na jejich pořadí?)*

Libovolné 3 body nám určí právě jednu rovinu. Chceme tedy zjistit počet všech neuspořádaných trojic bodů vybraných z množiny o 2021 bodech. Spočtěme nejprve uspořádané trojice, těch bude $2021 \cdot 2020 \cdot 2019$, neboť po každém výběru nám jeden bod odpadne. Nyní musíme trojice *oduspořádat*. Každou trojici jsme totiž započítali přesně $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ krát (zde počítáme obdobným způsobem.) Celkový výsledek je tak $2021 \cdot 2020 \cdot 2019/6 = 1373734330 = moc$.

Úloha 7. *Sudičky napsaly do řádku 100 čísel. V každém dalším kroku připíší další řádek tak, že pod číslo c napíší počet výskytů čísla c v předcházejícím řádku. Ukažte, že od jistého řádku už budou všechny řádky stejné.*

Můžeme si všimnou zajímavé věci – v každém dalším řádku bude počet různých čísel na tomto řádku menší nebo roven počtu různých čísel na řádku předešlém. Nikdy se nemůžete stát, že by na dalším řádku bylo najednou více různých čísel.

Nyní se zamysleme, co se stane, pokud počet různých čísel zůstane stejný jako na předešlém řádku. Znamená to, že každé číslo na předešlém řádku bylo v tomto řádku jiný počet krát. Tedy například neexistovala dvě čísla, co by na předešlém řádku byla dvakrát. To ale znamená, že pokud tam například bylo nějaké číslo třikrát, máme na našem řádku právě tři trojky – do dalšího řádku pod ně napíšeme opět tři trojky, protože tam jsou třikrát. To stejné musí platit i o ostatních číslech. Tedy, ve chvíli, kdy se počet různých čísel mezi dvěma po sobě jdoucími řádky nezměnil, znamená to, že tento řádek se již bude opakovat do nekonečna.

A proč musí nastat chvíle, kdy na dvou řádcích po sobě bude stejný počet různých čísel? Protože počet různých čísel sice pořád klesá, ale nemůže klesat do nekonečna, nejméně různých čísel, co můžeme na řádku mít, je jedno číslo.