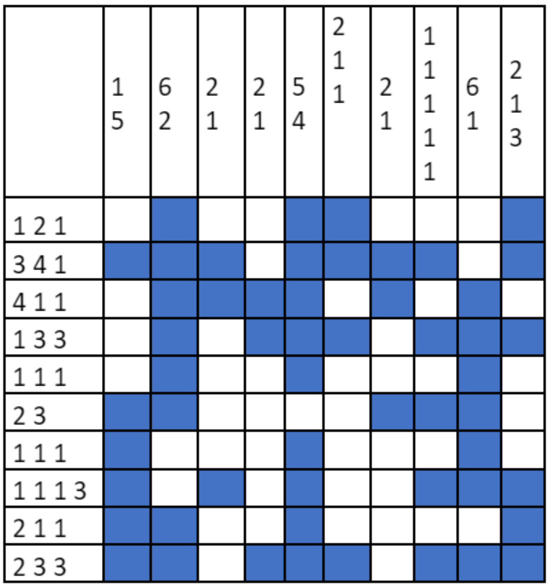
Řešení druhé série

Úloha 1. *Vybarvěte některá políčka v tabulce tak, aby čísla vždy označovala počet sousedících vybarvených políček ve skupinách v jednotlivých řádcích a sloupcích. Mezi jednotlivými skupinkami vybarvených políček je vždy alespoň jedno nevybarvené.*

	1 5	6 2	2 1	2 1	5 4	2 1 1	2 1	1 1 1 1 1	6 1	2 1 3
1 2 1										
3 4 1										
4 1 1										
1 3 3										
1 1 1										
2 3										
1 1 1										
1 1 1 3										
2 1 1										
2 3 3										

Řešení je pouze jedno, a to následující:



Úloha 2. *Konfucius se snaží rozdělit devět dětí s celočíselnými věky 6–14 let. Každé dvě děti mají různý věk. Chce je rozdělit do dvou skupinek tak, aby součin součtu věků všech dětí v první skupince a součtu věků všech dětí v druhé skupince byl roven 2021. Kolika způsoby to může udělat?*

Rozklad 2021 na prvočísla je $2021 = 43 \cdot 47$. Nutně tedy v jedné skupince musí být součet 43 a ve druhé 47. Samozřejmě není možné mít skupinky s věky 1 a 2021. A jinými způsoby součin 2021 nedostaneme.

Pokud by jich ve skupince se součtem věků 43 bylo 5, mají 3 možnosti, jak se rozdělit (ve skupince 43 by byli: 6,7,8,9,13; 6,7,8,10,12; 6,7,9,10,11), pokud by tam byli 4, mají 9 možností (14,13,10,6; 14,13,9,7; 14,12,11,6; 14,12,10,7; 14,12,9,8; 14,11,10,8; 13,12,11,7; 13,12,10,8; 13,11,10,9).

Více než 5 ani méně než 4 jich být nemůže, protože součet šesti možných nejmladších dětí je větší než 43 (6+7+8+9+10+11 = 51) a součet tří možných nejstarších dětí je menší než 43 (14+13+12 = 39). Celkově tedy 12 možností.

Úloha 3. *Ikaros, Thes a Sókratés hrají hru o šesti kolech. Hází kostkou a předtím tipují, co padne. Všechna čísla kromě čísla 6 padla během hry na kostce alespoň jednou. Ikaros tipoval postupně čísla 1, 2, 3, 4, 5, 6 a trefil se pouze v 1. kole. Thes tipnul v 1. kole 6 a potom tipoval to, co padlo na kostce v předchozím kole. Trefil se pouze v 5. kole. Sókratés tipoval pořád to stejné číslo a trefil se pouze ve 3. kole. Ve 3. kole tipnuli Ikaros a Thes stejné číslo. V 5. kole tipnuli Ikaros a Sókratés různá čísla. Zjistěte, co padlo na kostce v každém kole a jaké číslo tipoval Sókratés.*

Napíšeme si tabulku, kterou budeme postupně doplňovat. Víme přesně, co tipoval Ikaros ve všech kolech a co Thes v 1. kole. Ikaros se trefil v prvním kole, takže víme, že v 1. kole padlo číslo 1. Toto také Thes tipnul ve 2. kole (kopíruje kostku). Dále víme, že Thes ve 3. kole tipnul to, co Ikaros, tedy číslo 3. Tím pádem i víme, že ve 2. kole padlo také číslo 3. Pokud padlo ve 4. kole číslo T, tipnul ho Thes v 5. kole, kde padlo opět toto T, protože se Thes trefil, a také ho tedy tipoval i v 6. kole. Sókratovo číslo označíme S a budeme vědět, že S padlo ve 3. kole (Sókratés se trefil), tím pádem ho také Thes tipnul ve 4. kole. Číslo, které padlo na kostce v 6. kole označíme Z.

kolo	1.	2.	3.	4.	5.	6.
kostka	1	3	*S*	*T*	*T*	*Z*
Ikaros	**1**	2	3	4	5	6
Thes	6	1	3	*S*	***T***	*T*
Sókratés	*S*	*S*	***S***	*S*	*S*	*S*

Na základě toho, že všechna čísla kromě 6 padla alespoň jednou, musela padnout 1, 2, 3, 4, 5 a právě jedno z nich dvakrát. Jedničku a trojku jsme již odhalili. Dále víme, že číslo T se v hodech opakuje, takže právě to bude použito dvakrát. Tím pádem S musí být od něj různé a Z bude ještě jiné. Mezi čísla T, S a Z se rozdělí zbývající čísla 2, 4 a 5.

T nesmí být 4 ani 5, protože by se jinak ve 4. i 5. kole Ikaros trefil, což ale není pravda. Bude to tedy 2. Na S zbývá 4 a 5. Ze zadání ale víme, že v 5. kole tipnuli Ikaros a Sókratés různá čísla, takže Sókratés netipnul číslo 5, a musel tedy tipovat číslo 4, je to tedy ono T. Na Z pak zbývá číslo 5.

kolo	1.	2.	3.	4.	5.	6.
kostka	1	3	4	2	2	5
Ikaros	**1**	2	3	4	5	6
Thes	6	1	3	4	**2**	2
Sókratés	4	4	**4**	4	4	4

Odpovědi tedy jsou, že padala postupně čísla 1, 3, 4, 2, 2 a 5 a že Sókratés tipoval číslo 4.

Úloha 4. *Kryptex se otevírá čtyřmístným kódem z číslic od 1 do 9 tak, že jeho ciferný součin je dělitelný každým z jednociferných přirozených čísel. Kolik takových kódů existuje?*

Jednociferná prvočísla jsou 2, 3, 5, 7, z čehož plyne, že v kódu musí být na jednom místě 5 a na jiném 7, neboť jinak by ciferný součin nemohl být těmito prvočísly dělitelný. Dále projděme zbývající čísla. Na jednom ze dvou zbývajících míst bude

2: pak potřebujeme doplnit ještě $2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 > 9$

3: pak potřebujeme doplnit ještě $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 > 9$

4: pak potřebujeme doplnit ještě $2 \cdot 3 \cdot 3 > 9$

6: pak potřebujeme doplnit ještě $2 \cdot 2 \cdot 3 > 9$

Zbývají nám tedy pouze 8 a 9 a ty tam zřejmě musí být obě zároveň.

Neuspořádanou čtveřici 5,7,8,9 s ciferným součinem $2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 = 2520$ teď musíme uspořádat. Jelikož číslice jsou po dvou různé, vystačíme si s počtem všech permutací, tedy různých přeskupení, čtyřprvkové množiny, který je roven $4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$. Jsme v cíli.

Úloha 5. *Mějme pravidelný n-úhelník vepsaný do kružnice, kde $n = 2^i$ (i je přirozené číslo větší nebo rovno dvěma). Dokažte, že pro větší n bude mít n-úhelník i větší obsah.*

Zvyšováním i o jedna dostáváme posloupnost n tvořenou mocninami dvojky $(2, 4, 8, \dots)$. Stačí nám tedy dokázat, že když vytvoříme $2n$-úhelník, bude jeho obsah větší než u n-úhelníku.

Když do kružnice vepíšeme pravidelný n-úhelník, znamená to, že jeho n vrcholů se pravidelně rozmístí po kružnici (tj. mezi sousedními bude vždy stejná vzdálenost). Pravidelný $2n$-úhelník vytvoříme tak, že na kružnici mezi každé dva stávající body n-úhelníku vepíšeme jeden bod, který bude mít od obou původních stejnou vzdálenost. Tyto tři body neleží na přímce, budou tedy vždy vytvářet trojúhelník, který má nenulový obsah. Těchto n trojúhelníku bude mít nulový průnik s původním n-úhelníkem a součet jejich obsahů a obsahu tohoto n-úhelníku bude dávat obsah $2n$-úhelníku. Z toho vyplývá, že obsah $2n$-úhelníku bude vždy větší než obsah n-úhelníku. Důkaz je hotov.

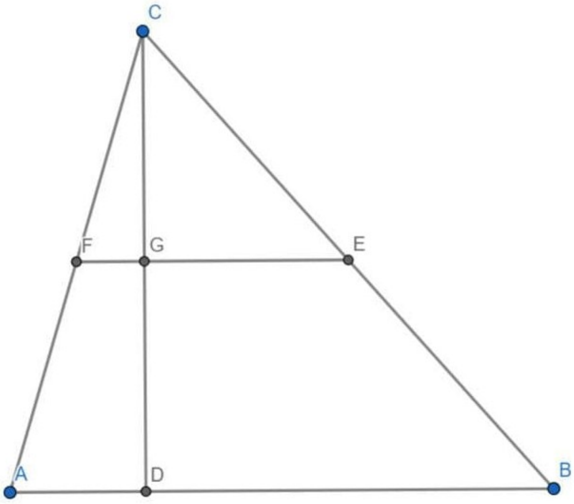
Úloha 6. *Ikaros měl 100 žárovek a k nim sto přepínačů. Když zmáčkl první přepínač, tak změnil stav (z vypnuté na zapnutou či naopak) každé žárovky. Když zmáčkl druhý přepínač, tak změnil stav každé druhé žárovky (2.,4.,6.,...). Když zmáčkl třetí přepínač, tak změnil stav každé třetí žárovky (3.,6.,9.,...), atd. Na začátku byly všechny žárovky zhasnuté. Kolik z nich by bylo rozsvíceno po zmáčknutí všech sto přepínačů?*

Označme si žárovky čísly od 1 do 100. Stav žárovky pak záleží na počtu přirozených dělitelů jejího čísla, tolik bude totiž přepínačů, co ovlivní tuto žárovku. Pokud bude počet dělitelů sudý, žárovka zůstane vypnutá. Pokud bude počet dělitel lichý, žárovka bude zapnutá. Zvolme si libovolné číslo n ($n \in < 1, 100 >$) a nechť a je jeho dělitelem. Pak logicky existuje dělitel $b = \frac{n}{a}$, který také dělí číslo n. Dělitelé by tedy měli přicházet po dvojicích. Tak tomu není ale pouze v případě, když $b = a$ (stejný dělitel započítáme pouze jednou). Což znamená, že $n = a^2$, tedy n je mocninou nějakého přirozeného čísla. Zapnuté proto zůstanou jen žárovky, jejichž číslo je druhou mocninou přirozeného čísla, takových čísel v intervalu $< 1, 100 >$ je právě deset, $1^2 = 1$ až $10^2 = 100$.

Úloha 7. *V trojúhelníku ABC je D pata výšky na stranu c. Tato výška dělí obsah trojúhelníka v poměru 3:1 (platí $AD < DB$). Středy stran a, b jsou popořadě E, F. Průsečík EF a CD označme G.*

Trojúhelník FGC má obsah 5 cm^2. Jaký je obsah trojúhelníku ABC?

1) EF je střední příčka v trojúhelníku ABC. Znamená to, že je rovnoběžná s AB, má poloviční délku a protíná výšku na stranu c v její polovině. Platí tedy $\mid GC \mid = \frac{1}{2} \cdot \mid DC \mid$.



2) Pokud DC dělí obsah trojúhelníku ABC v poměru 1 : 3, musí v tomto poměru dělit i stranu AB, protože obsah je ovlivněn pouze stranou a výškou na ni a v tomto případě je výška trojúhelníků ABC, ADC a DBC stejná. Platí tedy $\mid AD \mid = \frac{1}{4} \cdot \mid AB \mid$.

3) Bod F je středem strany AC ze zadání a z bodu 1) víme, že G je středem strany DC. Úsečka FG je tedy střední příčkou v trojúhelníku ADC. Díky tomu víme, že FG má polovinu délky AD. Společně s bodem 2) vychází $\mid FG \mid = \frac{1}{8} \cdot \mid AB \mid$.

4) DC je výška a FE je střední příčka, jsou tedy na sebe kolmé. Díky tomu získáme obsah trojúhelníku FGC snadno vynásobením délek FG a GC a vydělením dvěma. Porovnáme obsahy trojúhelníků ABC a FGC:

$$S_{ABC} = \frac{\mid AB \mid \cdot \mid DC \mid}{2}$$

$$S_{FGC} = \frac{\mid FG \mid \cdot \mid GC \mid}{2} = \frac{(\frac{1}{8} \cdot \mid AB \mid) \cdot (\frac{1}{2} \cdot \mid DC \mid)}{2} = \frac{1}{16} \cdot S_{ABC}.$$

Zjišťujeme, že trojúhelník FGC má šestnáctinu obsahu trojúhelníku ABC. Pokud má FGC obsah 5 cm^2, obsah ABC je $16 \cdot 5 = 80$ cm^2.