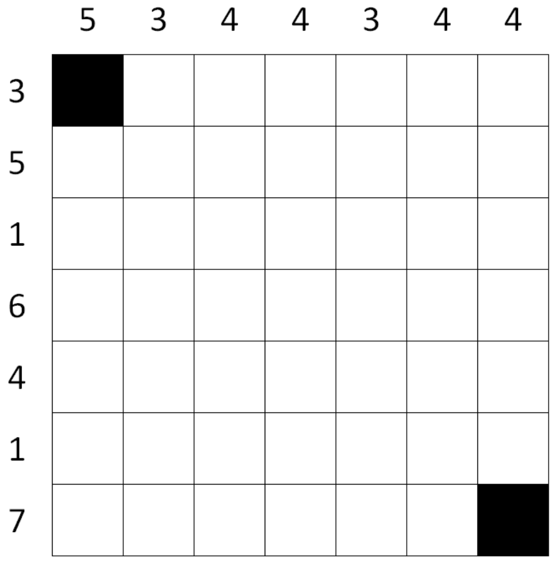
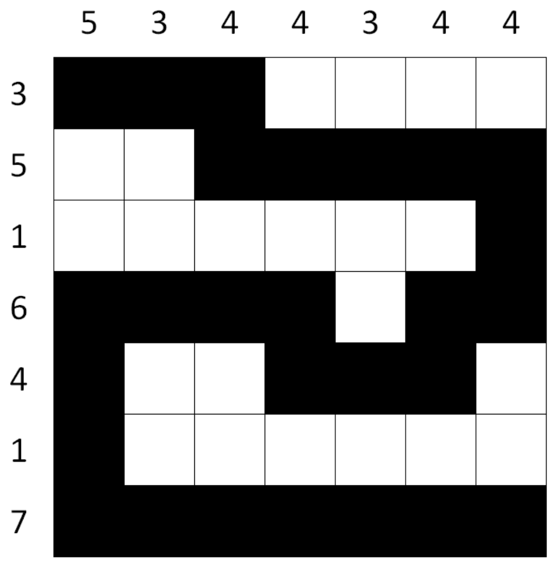
Řešení první série

Úloha 1. *Do tabulky doplňte řetězec dlaždiček (hada), po kterých Ikaros přešel ke dveřím, z nichž sousední sdílí hranu, tak, aby se žádná dvě po sobě nejdoucí nedotýkala hranou ani rohem. Zároveň řetězec začíná a končí ve vyznačených polích. Čísla na okrajích tabulky udávají, na kolik dlaždiček v příslušném řádku či sloupci Ikaros šlápl.*



Řešení je pouze jedno. Jistě můžeme začít vyplněním celého nejspodnějšího řádku, dále pokračujeme předposledním řádkem, kde musí být začerněna dlaždička nejvíce vlevo, protože se had nemůže rozdvojit. Z toho políčka musíme pokračovat opět nahoru, jelikož se had sám sebe nedotýká. Odtud stále musíme postoupit hadem nahoru, protože kdybychom odbočili doprava, aby v druhém sloupci byly právě tři dlaždičky zaplněné hadem, museli bychom pokračovat ještě dále doprava, pak bychom ale nebyli schopni zaplnit ve čtvrtém řádku šest dlaždiček, jelikož se had sám sebe nedotýká.
Podobnými úvahami se dostaneme ke kýženému řešení.



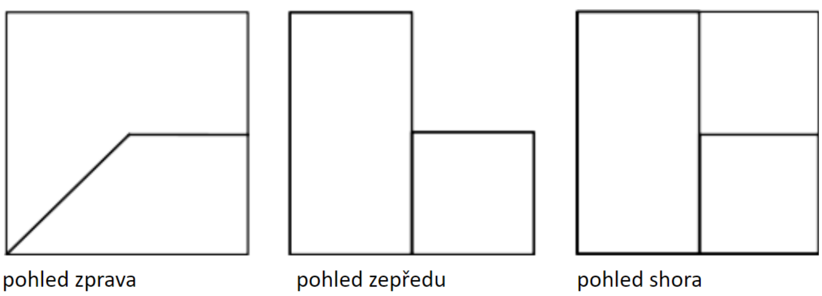
Úloha 2. *Na těchto sedmi trůnech seděli Démétér, Athéna, Artemis, Afrodité, Apollon, Árés a Dionýsos. Napište pořadí, v jakém seděli, pokud víte, že platilo následující:*

- *Árés urazil krásu Afrodité a s Athénou se nepohodl ohledně válečné strategie, tudíž neseděl vedle nich;*
- *Afrodité byla stejně daleko od Apollona jako od svého manžela Árése;*
- *protože byl Dionýsos opilý a Athény se všichni bojí, měli oba jen jednoho souseda;*
- *Démétér seděla vlevo od Dionýsa a vpravo od Afrodité.*

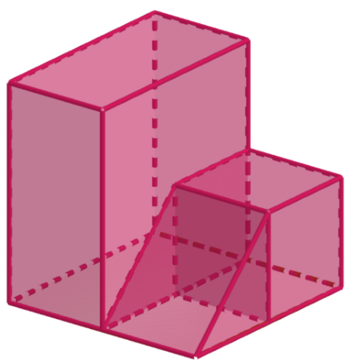
Athéna a Dionýsos musí být na krajích kvůli třetímu kritériu. Protože Démétér má být vlevo od Dionýse a navíc vpravo od Afrodity, musí být pořadí těchto čtyř Athéna, Afrodita, Démétér, Dionýsos, tedy Athénu a Dionýsa už víme najisto. Protože Árés nesousedí s Afroditou, musí být vzdálenost Apollona od Afrodity taky alespoň objedno, proto jediná vyhovující pozice Afrodity se splněním druhého kritéria je právě uprostřed. Démétér nám zapadne do jediného volného místa hned napravo od Afrodity, stejně jako Artemis, která bude hned nalevo od Afrodity a zbývá nám rozhodnout pořadí Apollona a Árés. Víme, že Árés nesousedí s Athénou, tedy je jasně dáno, že vedle Athény bude Apollon a vedle Dionýsa pak bude Árés. Seřazení je tedy následující:

Athéna, Apollon, Artemis, Afrodita, Démétér, Árés, Dionýsos.

Úloha 3. *Načrtněte budovu podle jednotlivých pohledů a určete její obsah, jestliže nejdelší hrana má délku 2 a všechny stěny jsou rovné.*



Všechny stěny musí být rovné a na pohledech jsou vidět právě všechny hrany stěn, které nejsou zakryty nějakou stěnou. Řešení je následující:



Obsah: $S = 2 \cdot 1 \cdot 2 + 1 \cdot 1 \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 = 5,5$

Úloha 4. *Ikarovi je 54 let, Daidalovi 80 let. Kolikrát se od posledního Ikarova znovuzrození (bylo mu 0 let) stalo, že Daidalův věk byl přirozeným násobkem Ikarova věku? Kolik tehdy Ikarovi bylo?*

Rozdíl jejich věků je 26 let. Označme Ikarův žádaný věk x, Daidalos pak bude x-krát starší. Platí tedy

$$\begin{aligned} x + 26 &= k \cdot x \\ 26 &= k \cdot x - x \\ 26 &= (k-1) \cdot x \end{aligned}$$

Ikarův věk tedy musí být dělitelem 26, dělitelé čísla 26 jsou 1, 2, 13, 26 (Daidalovi pak bude po řadě 27, 28, 39, 52, což jsou skutečně násobky Ikarových věků).

Odpověď: Stalo se to tedy čtyřikrát, a to když Ikarovi bylo 1, 2, 13 a 26 let.

Úloha 5. *V dílně se nacházel i výrobní pás, který postupně přidával do vajíček zvláštní látky. Do vzorků vajíček se přidávala síla, obratnost, důvtip a pokora.*

- *Síla se přidávala do každého 7. vzorku,*
- *Obratnost se přidávala do každého 21. vzorku,*
- *Důvtip se přidával do každého 18. vzorku,*
- *Pokora se přidávala do každého 10. vzorku.*

Přidání látek do jednoho vzorku trvá 2 minuty a na výrobu dohlíží 5 robotů střídajících se po 7 hodinách (v pořadí: Alfa, Beta, Gamma, Delta, Epsilon). Který robot uvidí kombinaci všech čtyř vlastností v jednom vzorku, jestliže ji naposledy viděl Gamma?

Nejmenší společný násobek čísel 7, 10, 18 a 21 je 630. Protože výroba trvá dvě minuty, objeví se kombinace $ABCD$ jednou za 1260 minut = 21 hodin. To jsou tři celé směny. Je tedy jedno, zda dozorce 3 tuto kombinaci uviděl na začátku nebo na konci své směny, další vždy padne do směny dozorce 1.

Úloha 6. *Projděte bludištěm. Začínáte ve středu (pole s číslem 1), můžete se přesunout na kardinálně vedlejší pole (ta která sousedí stranou). Začínáte s číslem 1 a při vstupu na jiné pole své číslo násobíte/dělíte číslem uvedeným na poli. Pole s X umocňují vaše číslo na druhou. Cílem je projít jedním z východů s číslem 6615. Žádným polem nesmíte projít dvakrát. Všechny průběžné výsledky na cestě musí být celá čísla. Východy jsou označeny červenou barvou.*

:17	*2	*5	*3	:25	*16	*18	*13	:3	*24	*3
*3	:11	*8	*4	*25	*3	:15	*10	:5	*14	:151
*6	:13	*121	*5	*13	*2	:143	*17	*3	*6	*8
*9	*5	*28	:9	*6	*13	*5	*10	X	:9	*11
*4	*10	*9	*3	*7	*11	*4	:17	:25	*2	*9
*149	:3	*13	*8	*4	1	*13	*6	*5	*19	*14
*6	X	*18	:3	*5	*3	*30	*13	*12	*5	*27
:715	*5	*9	*15	*12	*5	:15	*9	X	:3	*8
*2	:39	*8	*20	:3	*8	*5	*4	*25	*6	*13
:17	*15	:55	*6	*9	*23	:23	*2	*15	:5	*9
*45	*4	:13	:3	:11	*12	*10	:15	*13	*22	:13

Rozložíme 6615 na prvočinitele, dostáváme $6615 = 3^3 \cdot 5 \cdot 7^2$. Při prozkoumání tabulky zjistíme, že nikde není pole dělící sudým číslem, tedy jakmile jednou vstoupíme na pole se sudým číslem, budou vycházet samá sudá čísla. Všechna pole se sudými čísly tak můžeme vyškrtnout, takže se tabulka zjednoduší na bludiště:

	X				X	X			X	
		X	X				X		X	
X					X				X	X
		X		X			X			
X	X					X			X	
			X	X	1		X			X
X		X				X		X		
				X						X
X		X	X		X		X		X	
			X				X			
	X				X	X			X	

Dále si všimneme, že potřebujeme 7^2, ale v celé tabulce je jen jedna sedmička (nebo její nesudý násobek), tedy musíme projít přes ni a jedno X. Jakmile projdeme polem *7, je cesta jednoznačně určena až k X, poté je nejblíže spodním východ. Zkusíme proto dojít nejkratší cestou neobsahující sudá čísla ke spodnímu východu a po propočtení opravdu vychází číslo 6615. Výsledná cesta je vyznačena červeně.

:17	*2	*5	*3	:25	*16	*18	*13	:3	*24	*3
*3	:11	*8	*4	*25	*3	:15	*10	:5	*14	:151
*6	:13	*121	*5	*13	*2	:143	*17	*3	*6	*8
*9	*5	*28	:9	*6	*13	*5	*10	X	:9	*11
*4	*10	*9	*3	*7	*11	*4	:17	:25	*2	*9
*149	:3	*13	*8	*4	1	*13	*6	*5	*19	*14
*6	X	*18	:3	*5	*3	*30	*13	*12	*5	*27
:715	*5	*9	*15	*12	*5	:15	*9	X	:3	*8
*2	:39	*8	*20	:3	*8	*5	*4	*25	*6	*13
:17	*15	:55	*6	*9	*23	:23	*2	*15	:5	*9
*45	*4	:13	:3	:11	*12	*10	:15	*13	*22	:13

Úloha 7. *Na vyjádření všech písmen z anglické abecedy v Morseově abecedě stačí pouze sekvence teček a čárek o maximální délce 4. Čínština obsahuje přibližně 8000 aktivně využívaných znaků.*

1. *Jaké je nejmenší maximum délky sekvence v tomto případě?*
2. *Pokud by byl požadavek, aby délka sekvence byla 4, kolik nejméně různých druhů symbolů (původně jen tečky a čárky) by bylo potřeba použít?*
3. *Navrhni optimální kombinaci počtu druhů znaků a maximální délky sekvence z hlediska praktičnosti. Svoje řešení řádně odůvodni.*

1) Nejprve určíme, jak se mění počty kombinací pro jednotlivé délky sekvencí. Na každé pozici v sekvenci mohou být právě 2 různé znaky, a to nezávisle na ostatních pozicích. Počet kombinací tedy bude 2^n, kde n je délka dané sekvence. Celkový počet možných různých znaků tedy bude součet hodnot 2^m, kde m dosahuje přirozených hodnot od 1 po n. Hledáme tedy nejbližší vyšší číslo, než je 8000, které vznikne jako součet $2^1 + 2^2 + \ldots + 2^n$.
$2 + 4 + 8 + 16 + 32 + 64 + 128 + 256 + 512 + 1024 + 2048 + 4096 = 2 \cdot 4096 - 2 = 8\,190$. V tomto součtu máme 12 mocnin dvojky a tedy i 12 pozic v sekvenci. Nejmenší maximum délky sekvence by bylo 12.

2) Využijeme předchozích poznatků a z nich dostaneme nerovnici: $x^1 + x^2 + x^3 + x^4 > 8000$. Nyní lze poměrně rychle dojít k nejmenší možné hodnotě $x = 10$. Pro sekvenci o délce 4 by muselo být použito minimálně 10 různých znaků.

3) Nyní hledáme rozumný poměr mezi množstvím druhů znaků a délkou sekvence. Rozumným poměrem rozumíme poměr blížící se 1, ale s co nejmenšími zmíněnými hodnotami. Vzhledem k relativně malým

číslům lze vyzkoušet možnosti a ukázat, že optimálním řešením je sekvence délky 5 s šesti různými znaky. (Pozn. 3. část úlohy je spíše diskuze. Optimální řešení není jednoznačně definováno a velice záleží na potřebách uživatele. Od toho se také odvíjí bodování této části úlohy. Body se za nesprávné či neúplné řešení neztrácí, pouze se za pěkné úvahy body přidávají, pokud z předchozích dvou částí nějaké do maxima chybí.)