Zadání Čtvrté Série

Termín Odevzdání: 4. 3. 2013

Budíky jsou již od pradávna zrádná stvoření. Stačí je jen o několik setin špatně natáhnout a už máte padesátiprocentní šanci, že se vzbudíte pozdě. V případě budíků je několikanásobná kontrola nutnou záležitostí. Smůla, že předchozího večera byl Bonifác ze svého nedobrovolného výletu natolik vyčerpaný, že na tohle pravidlo zapomněl.

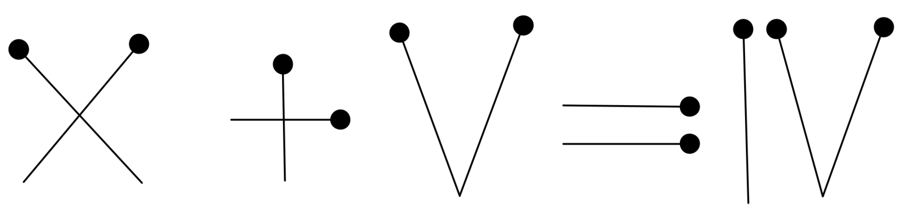
Úloha 0. *Vymyslete o Bonifácovi anekdotu s matematickou tématikou.*

A jeho spánek byl tak tvrdý (zdál se mu totiž blažený sen o tom, jak se svými sourozenci Pankrácem a Servácem vyrůstali za Sedmero vzorci), že ani nezpozoroval, že se někdo dobývá do jeho domu.

Úloha 1. *Tři komáři hráli karty. Nejprve prohrál první a dal druhému i třetímu tolik dukátů, kolik zrovna u sebe měli. Pak prohrál druhý a dal prvnímu a třetímu tolik důkátů, kolik u sebe v ten okamžik měli. Obdobně nakonec prohrál třetí a dal prvnímu a druhému tolik dukátů, kolik jich již měli. Na konci měl každý z nich* 24 *dukátů. Kolik měl který z nich na začátku hry?*

Když si uvědomil, že slyší zvuky, bylo již za pět minut dvanáct, jak se říká. Okamžitě vystřelil z odmocniny, tak bleskově, že všechny načechrané kružnice pod jeho hlavičkou se rozkutálely po celé místnosti. Konstantní rychlostí se hrnul k bezpečnostnímu trezoru a z rozespalosti se jen stěží stíhal soustředit na kód, který bylo nutno zadat.

Úloha 2. *Na obrázku máte početní příklad poskládaný ze sirek. Přemístěte jednu sirku tak, aby platila rovnost (znaménko rovná se musí zůstat zachováno).*



Nakonec se mu to povedlo v momentě, kdy už někdo otvíral dveře jeho podkroví. Až teď, ačkoliv ještě napůl spící, si začal uvědomovat, že není možné, aby se do jeho pokoje někdo dostal. Kód na hlavních dveřích nebyl o moc jednodušší, než kód u trezoru. Měnil se podle nálady a sám Bonifác měl již několikrát problém sám jej vyřešit.

Úloha 3. *Doplňte do schématu čísla tak, aby součet čísel v každém řádku sloupci i na obou hlavních diagonálách byl stejný.*

	3	6
5		5
4	7	

Ten někdo, kdo se sem dostal musel být v matematice na podobné úrovni jako on sám. V tu samou chvíli, co o tom uvažoval, mu však došlo, že slyší povědomý hlas. Přitiskl se blíže ke dveřím trezoru. „Račte dále, mademoiselle.“ No ano. Byl to přece bod S. Ten zdánlivě věrný bod S, strážce všech jeho kružnic, který jej vždy podporoval. A teď se ukázal jako zrádce. „Lieu étrange,“ prohlásila osoba, co právě vstoupila. Bonifác uměl dobře řecky, jak by ne, když spousta jeho přátel, jako třeba Pythagoras, postavili základní kameny jeho matematického světa, ale jak přišlo na jiné jazyky, ani jeho matematické příručky nebyly tak mocné, aby si poradily. Takže jeho „návštěva“ nejspíš do světa přírodních věd zabrousila jen čistou náhodou. A kdyby nebylo toho pitomce S, ani by neměla šanci se dostat Bonifácovi do jeho revíru. V tom ho ale něco napadlo. Nahmatal válec, který si zde schovával na počítání objemů, pak vší silou otevřel dveře trezoru, rozběhl se a praštil příchozí po hlavě. S na něj celou dobu jen vyděšeně civěl. Když si uvědomil, která bije, couvnul a utekl pryč. Bonifác se ani neobtěžoval jej následovat a se zvědavostí si prohlížel osobu, co vypadala jako malá Eiffelovka s baretem. Dlouho se nerozmýšlel, strhl ze stěny kulatou závorku a osobu v bezvědomí svázal. V tu ránu znovu usnul vyčerpáním. Zdál se mu krátký sen.

Úloha 4.
a) *Najděte všechny dvojice celých čísel a, b, tak, aby splňovaly rovnice*

$$a + b = 5,$$

$$a \cdot b = -24$$

b) *Řešte rovnici:*

$$\sqrt{x-8} + \sqrt{x-4} = 2$$

(Žákům 6. a 7. tříd základních škol a odpovídajících ročníků víceletých gymnázií bude započítán lepší z příkladů a), b); žákům 8. a 9. tříd základních škol a odpovídajícím ročníkům víceletých gymnázií bude započítán pouze příklad b).)

Ani druhé probuzení nebylo nikterak příjemné. Tentokrát se nikdo neobtěžoval šeptat. Byl to řev zdivočelého stáda. Jediné štěstí, že nebylo v jeho podkroví, ale shromažďovalo se dole pod radnicí. Bonifác otevřel okno a promnul si ospalé oči. Musel však ještě několikrát zamrkal a promnout si je znovu, aby se ujistil, že skutečně vidí to, co si myslel, že vidí. Tolik zástupců říše jazyků v životě neviděl. Nedokázal by je ani přesně pojmenovat. „Vraťte nám Francouzštinu*!“zaječela Latinka. (*z jazykového hlediska se všechny názvy řečí a písem zde uvedených samozřejmě nepíší s velkým počátečním písmenem, ale pro lepší orientaci obyvatel Ludolfova údolí jsou v Bonifácově kronice zapsány tímto způsobem) „Až to zjistí Úřad indoevropských jazyků, roznese vás všechny na kopytech!“ Za jejími zády stály všechny body a proměnné výrazy. Všechna písmena je zradila.

Úloha 5. *V ústředně jě několik telefonů, které jsou spojeny kabely a tvoří síť. Každý kabel spojuje obousměrně dva telefony. Mezi každými dvěma telefony vede nejvýše jeden kabel a žádný kabel nevede z jednoho telefonu zpět do toho samého.*

a) *V síti je celkem* 200 *kabelů a z každého telefonu trčí* 10 *kabelů. Kolik je v ústředně telefonů?.*
b) *V síti je* 7 *telefonů, přičemž ze* 4 *z nich trčí po* 4 *kabelech ze zbylých* 3 *trčí* 3 *kabely. Lze takovou síť sestrojit? Pokud ne, kolik nejméně telefonů je třeba odstranit, abychom dostali sestrojitelnou síť? Uveďte příklad takové sítě.*

(Žákům 6. a 7. tříd základních škol a odpovídajících ročníků víceletých gymnázií bude započítán lepší z příkladů a), b); žákům 8. a 9. tříd základních škol a odpovídajícím ročníkům víceletých gymnázií bude započítán pouze příklad b).)

„Co tu všichni chcete?“zděsil se Bonifác. „Spravedlnost!“ozvala se Cyrilice a položila dlaň na rameno své dcery Azbuky. „Už nás nebaví, že si dnešní lidé myslí, že přírodní vědy jsou důležitější než lingvistika!“ „Přesně tak!“ přidala se Alfabeta. „Bez nás byste nebyli nic!“ „I ty Alfabeto?“ zeptal se zkroušeně Bonifác. „Myslel jsem, že ti naše úzká spolupráce vyhovuje.“ Za Alfabetinými zády byla svázána do kozelce všechna písmena řecké abecedy. Teď mu bylo jasné, kdo se jej snažil zneškodnit. „Tak a dost!“ ozval se burácivý hlas a přistoupila majestátná osoba. „Navrať nám Francouzštinu, nebo vaše údolí pocítí hněv Jeana de La Fontainea a mnoho dalších!“ Tahle robustní dáma byla Literatura. Pěkně nahněvaná Literatura. „Bez nás byste nebyli absolutně nic!“ rozkřikla se. „Zcizili jste nám všechna písmena, zcizili jste nám literární díla a historii, bez které by nikdo z vás tady nemohl existovat! Myslíte si, že hýbete světem, když nemáte v sobě ani trochu srdce. To my jsme tu umění. My utváříme svět. A co za to máme? To, že se nad nás hodlá matematika povyšovat? Pche!“

Úloha 6. *Najděte pravoúhlý trojúhelník s celočíselnými délkami stran, jehož nejkratší strana má délku 2011.*

„Silná slova, Literaturo,“ ozvala se Bonifácova pravá ruka, Násobilka. „Kde by byla ta vaše historie, kdyby nebylo nás? Bez nás by se vývoj zasekl v počátcích, byli by jste úplně bezbranní!“ „Říká se BYSTE!“ osočil se Pravopis. „Máme toho tak akorát dost,“ přidal se hlouček piktogramů. „Já vám říkám, nebudeme se s nimi párat déle, než je potřeba,“ vmísila se do toho Gramatika. A pak to začalo. Vytáhly se slovníky, oxymórony, metafory, a palindromy (zvlášť všemi oblíbený Báře jede jeřáb – teď si to přečtěte pozpátku, haha). „Dnešním dnem změníme zákony matematiky!“ ušklíbla se Stylistika. „ZA LINGVISTIKU!“ Bonifác se otočil k zděšenému lidu matematickému a pustil se do dávání rozkazů. „Připravte rovnice. Tohle je válka.“

Důkazové Metody

Díl Čtvrtý

Do rukou se vám spolu s letákem čtvrté série dostává i nový díl seriálu o důkazových metodách v matematice. Tentokrát se zaměříme na méně známý koncept, který nám umožní jisté úlohy řešit až s magickou jednoduchostí, není nicméně snadné jej využít. Půjde o tzv. *invarianty.* Představme si, že řešíme úlohu, ve které je popsán nějaký proces či jeho jednotlivé kroky a naším úkolem je tento proces analyzovat a něco o něm dokázat. Nezřídka může být výhodné se snažit hledat vlastnost dané situace, která vykonáváním kroků procesu *není* ovlivněna a z toho následně vyvozovat důsledky. Právě takovou vlastnost nazýváme *invariantem.*

Pro řešení takových problémů neexistuje žádný předepsaný postup, který by fungoval vždy, je vyžadována vysoká míra invence a často se jako invariant použije veličina, která by nás na první ani druhý, ba ani n−tý pohled nemusela napadnout. Bez dalších řečí si proto předvedeme první ukázkovou úlohu.

Příklad. *Na kouzelné jabloni rostou banány a ananasy. Postupně budeme ovoce z jabloně trhat. V jednom kroku smíme odebrat dva kusy ovoce. Pokud odebereme dva kusy stejného druhu, vyroste nový ananas. Pokud odebereme dva kusy různého druhu, vyroste nový banán. Budeme krok opakovat, dokud na stromě nezbyde jediný plod. Jaký to bude plod, pokud víme, kolik bylo na začátku na stromě banánů a kolik ananasů?*

Řešení. Občas může být invariantem například parita nějakého čísla (tj. zda je číslo liché nebo sudé). Zkoumejme počet banánů na stromě. Ten se může buď o dva snížit, pokud odebereme dva banány a vyroste nový ananas, nebo se vůbec nezmění, pokud odebereme jeden banán a jeden ananas a nový banán nám vyroste. To znamená, že počet banánů na stromě se může změnit pouze o dva, takže jeho parita zůstává nezměněna, je *invariantem.*

Pokud je tedy na začátku na stromě lichý počet banánů, bude jich lichý počet až do konce, takže nelze docílit toho, aby všechny zmizely, neboť nula lichým číslem není. Tudíž pak zůstane na konci na stromě banán.

Pokud je na začátku na stromě sudý počet banánů, naopak nedosáhneme toho, aby zůstal jeden, neboť to není sudý počet, takže poslední zůstane ananas. ♣

Ještě jednou si v následující úloze předvedeme využití parity veličiny jako invariantu.

Příklad. *Na přímce stojí dvě figurky - vlevo modrá, vpravo červená. Máme povolené dvě operace: přidání dvou stejně barevných figurek vedle sebe na přímku (buď mezi některé dvě jiné figurky, nebo na kraj) a odebrání dvou sousedních stejně barevných figurek. Lze docílit toho, aby zůstaly opět dvě figurky, ale vlevo červená a vpravo modrá?*

Řešení. Tentokrát je potřeba hledanou veličinu volit „šikovněji“. Podívejme se na počet všech párů figurek (nejen sousedních) takových, že ta víc vlevo je červená a vpravo modrá. Přidáním nebo odebráním dvou modrých figurek zvýšíme nebo snížíme tento počet o dvakrát počet červených figurek vlevo od místa přidání, takže o sudé číslo - parita se tedy nezmění. Obdobně rozmyslíme, že i při přidání/odebrání červených figurek zůstává parita uvažované veličiny neměnná. Na začátku je toto číslo rovno nule, v konfiguraci, které chceme dosáhnout, je však rovno jedné, takže chtěné konfigurace dosáhnout nelze. ♣

V poslední úloze, kterou si předvedeme, než se pustíte do seriálové úlohy, uvidíme, že není potřeba rozlišovat jen sudost/lichost, můžeme tuto myšlenku zobecnit. Navíc volba invariantu bude ještě trikovější než výše.

Příklad. *Na obvodu kružnice máme 44 důlků, v každém z nich leží jedna kulička. V každém kroku vybereme dvě kuličky, jednu z nich posuneme o 1 důlek po směru hodinových ručiček, druhou proti směru. Lze opakováním tohoto kroku docílit toho, aby všechny kuličky ležely v jednom důlku?*

Řešení. Očíslujeme si dokola důlku čísly 1, 2 až 44. Nyní se podívejme pro každou kuličku podívejme, v kolikátém důlku leží a takto získaných 44 čísel sečteme - výsledek označme S. Nyní zkoumejme, jak se bude S měnit při jednom kroku. Mohou nastat následující situace:

- jedna kulička sníží své číslo o 1, druhá zvýší, takže se S nezmění.
- kuličky si vymění místa na pozicích 1 a 44, takže se S nezmění.
- jedna kulička přejde z 44 na 1 a druhá na číslo o 1 menší, takže se S celkově sníží o 44
- jedna kulička přejde z 1 na 44 a druhá na číslo o 1 větší, takže se S celkově zvýší o 44

Všimneme si, že ať už nastane libovolný případ, *zbytek po dělení S číslem 44* se nezmění, takže je to náš hledaný invariant! V počáteční situaci je tento zbytek roven 22 (necháváme k propočítání čtenáři), v žádáné koncové situaci je však roven nule, takže taková situace nastat nemůže a důkaz je tím završen. ♣

Úloha 7. *V jednom políčku tabulky 4x4 je napsáno číslo -1, v ostatních je napsáno číslo 1. Máme povolené dvě operace: změnit znaménka všech čísel v některém řádku nebo v některém sloupci. Lze dosáhnout toho, aby byly v tabulce samé jedničky?*

Tato aktivita je realizována v rámci veřejné zakázky *Pilotní ověření systému popularizace technických a přírodovědných oborů vytvářením vazeb vysokých škol na školy nižších stupňů*, která je součástí *IPN Podpora technických a přírodovědných oborů* (PTPO), reg. č. CZ.1.07/4.2.00/06.0005 . Projekt je spolufinancován Evropským sociálním fondem a státním rozpočtem České republiky.

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ