

Zadání Páté Série

Termín odevzdání: 4. dubna

„F! Ty jsi ten největší borec, kterého znám!“ P objal F až ho zvedl do vzduchu. F se zazubil: „P! X! Jsem tak rád, že vás vidím!“ Všichni se poobjímali. „F, dovol mi ti představit VPho!“ P vzal VPho za ramena a postrčil ho směrem k senátorovi s kulatými brýlemi. Senátor vypadal hrozně nervózně, nakonec se ale usmál: „Slyšel jsem toho o tobě tolik!“ VP se jenom zašklebil. Pořád nechápal, proč ho všichni tak znají. Nemínil se ale ptát, protože se bál, že by obrýlenému senátorovi způsobil psychickou újmu. „Kde jsi vzal tu parádní helikoptéru?“ zeptal se místo toho. F se pyšně zazubil: „Jsem přece senátor dopravy. Mám na starosti všechno, autobusy, tramvaje, ano, i helikoptéry!“

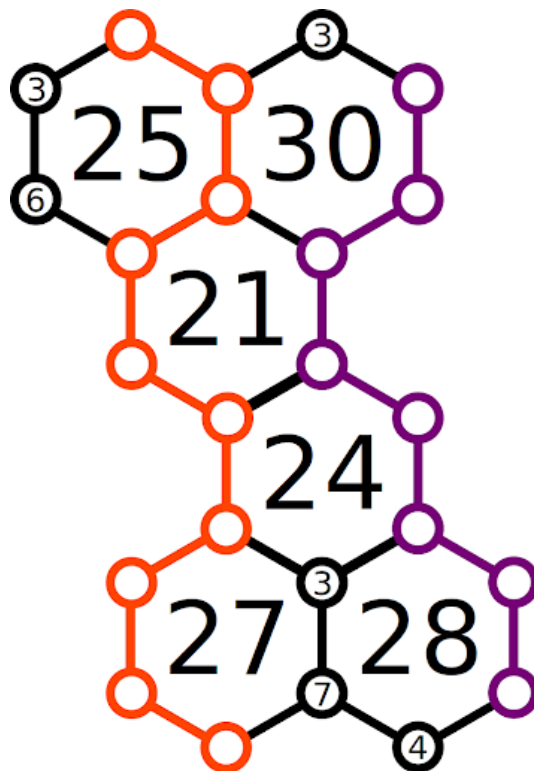
Úloha 0. Každý ze 26 senátorů (jak jste si možná už mohli všimnout pojmenovaných jako písmena abecedy) mají na starosti jiné odvětví. Napište ke každému senátorovi, který odbor řídí.

„Už to začalo?“ zeptala se X. „Začalo co?“ zeptal se VP. „KoMáR!“ „Začal komár?“ Na jeho zmatení odpověděl kluk, co přiletěl s F. Jmenoval se OP, měl kaštanově hnědé dlouhé vlasy a kostnatou postavu: „KOnečná Mistrovsky - Akční Revoluce!“ VP se zamračil: „No jasně, už chápu.“ P se na něj podíval: „Bojujeme s Odbojem už dlouho a je nás víc než si myslíš, X ale zvládla dostat klíčové informace a tím všechno odstartovala.“

Úloha 1. Doplň čísla 1 - 9 do prázdných vrcholů šestiúhelníků tak, aby:

- 1) v žádném šestiúhelníku nebylo některé číslo více než jednou
- 2) součet čísel ve vrcholech daného šestiúhelníku odpovídal číslu uprostřed něj
- 3) součet čísel v každém řetězci (oranžový a fialový) byl 40
- 4) oba řetězce byly od shora dolů doplněny čísly, která k sobě budou mít tento vztah:

? <? >? <? >? ...



„Kam letíme?“ zeptal se zvědavě VP. OP řídící vrtulník na něj mrkl: „Polehtali jsme pár míst a zdá se, že se nám povedlo vzbudit draka. Uvidíš!“ VP význam jeho metafory jen hádal. Vrtulník kroužil nad městem a bylo vidět zrovna vycházející Slunce. Nebe teď zářilo všemi barvami a jako by samo říkalo, že to je začátek něčeho nového. Helikoptéra se snesla na střechu senátu. Na náměstí Svobody se už srocovaly davy. Tisíce a tisíce lidí se tam mačkalo, a každý z nich přivítal přilet vrtulníku potleskem. Před senát vyběhla hrstka senátorů v dlouhých talárech. Z davu vyskočili další. „VP běž prosím s ostatními.“ učesala si své zrzavé vlasy X.

P, X a F se přidali na vyvýšené místo před senátem. X se chopila mikrofonu: „Občané Misky! Už dlouhou dobu zde bojujeme proti Senátu! Co všechno za škody nám napáchal. Dnes ale máme příležitost to změnit. Máme tu šanci na to, obrátit pověstnou minci. Co chcete vy, změnit systém, nebo zůstat při starém? Chcete mít možnost promluvit, chcete svobodné volby?“ Dav začal sborově buráčet: „ANO! ANO!“ VPho zamrazilo. Tohle byla síla jednoty. „Vaše volba je jasná. Co na to senátoři. Jak budou volit? Chtějí svobodné volby?“ Senátoři nad hlavu zvedli velké hlasovací tabule - s nápisem ANO a někteří s nápisem NE.

Úloha 2. *Senátoři dělají hlasování. Vyjde to 52% pro ANO a 48% pro NE. Pro ANO hlasovalo o jedna více lidí než pro NE. Kolik lidí celkem hlasovalo?*

Pro ANO hlasovala nadpoloviční většina. Dav propukl v ještě větší jásot. HA vystoupila z davu. Došla až k mikrofonu a přes celé náměstí byl slyšet její hlas: „A myslím, že budu mluvit za všechny, když oznámím výsledky všeobecných voleb na prezidenta. Teda, prezidentku,“ zazubila se a celé náměstí začalo skandovat: „X! X!“ Senátorce zvlhly oči: „Díky HA. Ale této funkce se vzdávám, ráda bych nastolila systém, senátu a sněmovny. Dvou naprosto nezávislých institucích, které se budou muset na všem shodnout. Žádnou moc jedné osoby. A samozřejmě každého senátora i poslance si zvolíme. A každý bude moci kandidovat!“ Všichni X zatleskali. Jásali. VPmu se zamotala hlava. Začal vidět podivné obrazy před sebou a pak spadl na zem.

Úloha 3. *Máme trojúhelník ABC. Úhly CAB a ACB jsou stejně veliké. Střed strany BC je S. Bodem S vedeme rovnoběžku na stranu AB. Průsečík rovnoběžky a strany AC je T. Kolik je $|ST|$, jestliže BC je 4?*

VP se vzbudil na prosté ošetřovně. Vedle něj seděl P s X. Prudce se posadil. „V klidu lež. Máš toho za sebou dost.“ Jak se praštil, když spadl, napadlo ho spoustu věcí. „Mami? Tati?“ X s P se usmívali: „Ty jsi opravdu chytrý kluk!“ A objali ho. „Senátoři měli zakázáno mít děti, a vůbec nějaké vztahy. To, že jsem našla tvého tátu a přivedla ho na myšlenky Odboje? To bylo trestné.“ P pokračoval: „Nemohli jsme tě vychovávat. Ale pořád jsme tě sledovali. Já už jsem dávno uprchl, když X ještě byla v Senátu a získala ty tajné informace. Bylo nám jasné, že půjdou hledat tebe, aby to z X dostali. A tak jsem pro tebe došel.“ VP se usmíval. Podíval se do očí P, které byly stejně prostě modré jako ty VPho. A ten úsměv X, to cukání koutků, to měl taky VP.

OP přišel na ošetřovnu: „Omlouvám se, že ruším. Je tu ale velká oslava, nechcete se přidat?“ VP se posadil na posteli: „Není oslava, na které bych chyběl!“ Sál byl vyzdobený a hýřil všemi barvami. Lidé si povíдали. Smáli se. Bez ohledu na to, v jaké společenské vrstvě se nacházeli. Na pódiu hrozně příjemně hrála kapela. Bubenici už VP znal, byla to MH se svými rebelsky kudrnatými vlasy a černým obojkem.

Úloha 4. *Čtyřčlenná kapela hrála zvláštní písničku. Písnička měla celkem 100 dob. První člen kapely tleskl vždy, když doba byla prvočíslo a tu dobu po tom, co doba bylo prvočíslo $(p+1)$. Druhý člen zaštěřchal vždy, když zbytek po dělení dvanácti byl 5. Třetí luská jen na doby, které obsahují číslíci tři. Čtvrtý zacinká poprvé první dobu, pak dvě doby vynechá, pak zase zacinká, pak jednu dobu vynechá, pak zase*

zacinká, pak zase vynechá dvě doby, zacinká, vynechá jednu dobu, zacinká, atd. Určete dobu, kdy zazní všechny zvuky.

Kapela začala hrát jakýsi ploužák, a protože X hrozně ráda tančí, P ji jako správný gentleman vyzval k tanci. VP seděl u stolu a popíjel pomerančovou limonádu. Zasnul se. Hráli nádherně. Duší s P a X a LR a VZ plul po parketu.

„Hrají pěkně, že?“ ozval se mu u ucha chraptivý hlas. „BABI!“ vykřikl a objal ji kolem krku, „Bál jsem se, že už tě nikdy neuvídím!“ Babča se jenom zasmála: „Víš, tvůj tatínek umí zachraňovat ženy v nesnázích.“ K nim ke stolu přišel MK (milý matematik s berlemi) s neuvěřitelně hlasitým klukem. Jmenoval se TP a nosil brýle. Viděl ho u stolu s občerstvením, jak si pobroukává "Brambrambamboor!", když si přidával už po páté francouzských brambor. Taky od něj slyšel ódu na svého kumpána, která sice neměla moc slov, ale za to chytlavou melodii: „Mám rád MK, já mám rád MK.“ „Co máte v plánu teď? Když už není Odboj?“ zeptal se jich VP. MK se na něj usmál: „Chceme hrozně moc cestovat. Senátor F nám půjčí svoje letadlo a procestujeme celou zeměkoulí:

Úloha 5. Dva cestovatelé TP a MK (kteří umí chodit po vodní hladině) se rozhodli, že si prochodí rovník. Měli vyrazit z nultého poledníku v Guinejském zálivu – TP na západ rychlostí v , MK na východ rychlostí w . MK ale nestihl kvůli berlím hydroplán a vyrazil na cestu ze zálivu až o 2 dny později. TP na něho nečekal. Kde (v zeměpisné délce) a za jak dlouho se cestovatelé potkají, když víme, že kdyby MK vyrazil hned po přiletu směrem za TP (taky na západ), dohnal by ho za 3 dny po uražení 360 km? (Uvažujeme obvod Země jako 40 000 km) (využívejte vztahu rychlost=dráha/čas)

MK s TP se smáli. VP se taky smál. Měl rodiče, babču a čekal ho vlastně úplně nový život. Mohl si vybrat povolání, jaké chtěl. Vlastně bude chtít ještě studovat, dodělá si střední, výšku. Asi z něj bude programátor. S počítači mu to šlo. Nějaká dívka ho pozvala tančit, on se ale zdvořile vymluvil a dál jen sledoval tančící páry.

Úloha 6. Páry tančí po spirále. Spirála se skládá z polokružnic na sebe hladce navazujících, přičemž s každou polokružnicí je její poloměr větší. První polokružnice má poloměr $\frac{1}{\pi}$ m, další $\frac{2}{\pi}$ m, další $\frac{3}{\pi}$ m atd. Pan P s X začali uprostřed a tančili po obvodu této spirály. Od začátku ušli 903 m. Jak daleko (vzdušnou čarou) je teď od místa, kde začínali? (Možná se vám tam někde objeví aritmetická řada, umíme počítat součet všech jejích členů?)

Zadíval se. Díval se na tančícího pana P s X, kteří se na něj vždy usmáli a pobídlí ho k tanci. Na LR s VZ, kteří se hrozně nahlas něčemu smáli a nesmírně si nadávali. Na AH, která podivně tančila sama, napříč parketem. Na JK, který se rozhodl rozšířit si vzdělání od VJ, dlouhovlasého blondáté muže s ostrými lokty, nechával si totiž vysvětlit teorii grup. Zaslechl JDho jak bezchybně zvládá jeho oblíbenou hudební skupinu zahrát na kytaru. JB, která měla perfektní taneční pohyby, ale zůstávala na boku, hlavně, aby ji nikdo neviděl. MH, která si právě vychutnávala sólo na bicí. HA, která na něj kulišácky mrkala, zatímco se zatouženě dívala na TP. Na TP s MK, kteří se smáli svým historkám z mládí. Na OP, který se podezřele usmíval a vykládal vtípky. Na všechny ty lidi, co za tak krátký čas poznal. Na všechny ty lidi, co už bral jako rodinu. Věděl, že všechny neznámé se našly a oni patří dohromady.

Úloha 7. Mějme uspořádanou n -tici $X_n = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ s prvky $x_i \in \{1, 2\}$ (tzn. n rozlišených čísel, kde každé z nich je 1, nebo 2) a výraz

$$V_n = x_1 + \dots + x_2 + x_1x_2 + \dots + x_{n-1}x_n + x_1x_2x_3 + \dots + x_{n-2}x_{n-1}x_n + \dots + x_1x_2 \dots x_n$$

obsahující jako členy všechny kombinace společných součinů těchto n čísel (nezáleží na pořadí, ale můžeme vybírat kombinace s libovolným počtem prvků menším nebo rovným n). Pro $n = 3$ máme tedy např.:

$$V_3 = x_1 + x_2 + x_3 + x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 + x_1x_2x_3$$

Najděte všechna X_n pro která výraz V_n nabývá sudé hodnoty. (Nápověda: Pokuste se V_n vyjádřit pomocí x_n a V_{n-1} .)